610 millions de constantes mathématiques, 98500 suites et 1 table, quelques programmes versus le CODATA 2002

Simon Plouffe
2 avril 2004

Quel est le problème exactement ?

Ce sont les données du NIST-CODATA 2002 : une table de constantes physiques et nous nous intéressons aux constantes sans dimensions. Ces données ont été publiées en décembre 2003, elles corrigent les données du CODATA 1998 qui lui-même corrigait les données du CODATA 1986. La précision numérique va de 6 à 12 chiffres décimaux.

Plus précisément aux 28 valeurs de rapports de masse entre particules élémentaires.

On ne sait rien sur ce sujet et aucune tentative sérieuse n'a été menée jusqu'ici.
La seule donnée véritablement lancée par un physicien a été Richard P. Feynmann dans les années 60 et qui a énoncé que

$$\text{Mproton/Mélectron} \approx 6\pi^5 = 1836.118107\ldots$$

Les ratios de masse et les masses en KG.

electron-alpha particle	0.00013709336
electron-deuteron	0.00027244371
electron-tau	0.00028756400
electron-neutron	0.00054386734
electron-proton	0.00054461702
electron-muon	0.00483633167
muon-tau	0.05945920000
muon-neutron	0.11245451750
muon-proton	0.11260952690
proton-tau	0.52801200000
neutron-tau	0.52874000000
proton-neutron	0.99862347872
neutron-proton	1.00137841870
tau-neutron	1.89129000000
tau-proton	1.89390000000
deuteron-proton	1.99900750082
helion-proton	2.99315266710
alpha particle-proton	3.97259968907
proton-muon	8.88024333000
neutron-muon	8.89248402000
tau-muon	16.81830000000
muon-electron	206.76828380000
proton-electron	1836.15267261000
neutron-electron	1838.68365980000
tau-electron	3477.48000000000
deuteron-electron	3670.48296520000
helion-electron	5495.88526900000
alpha particle-electron	7294.29953630000

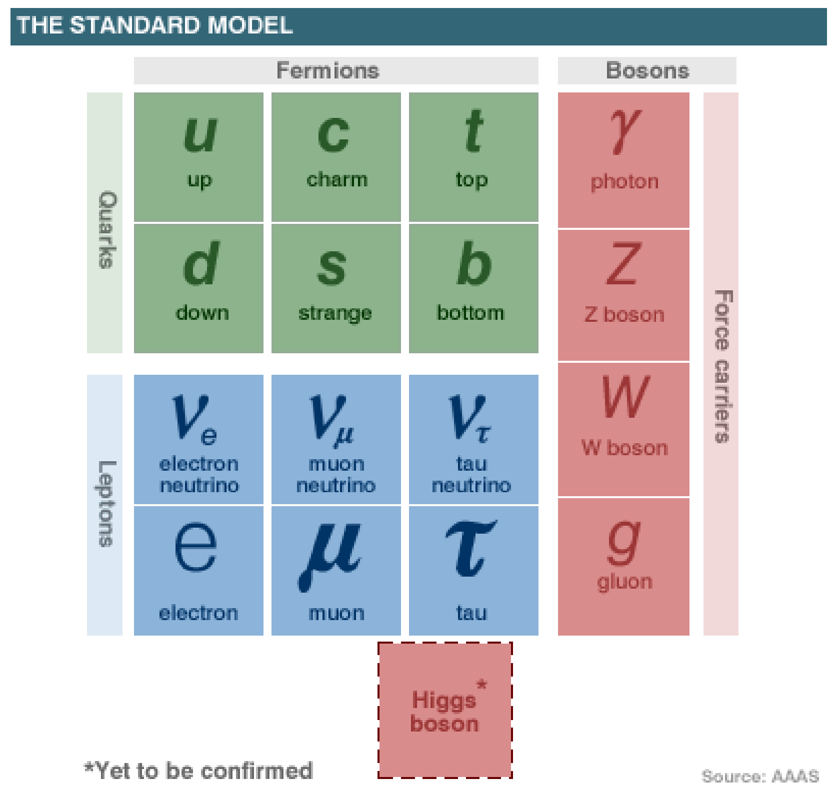
electron	9.1093826e-31
muon	1.8835314e-28
proton	1.67262171E-27
neutron	1.67492728E-27
tau	3.16777e-27
deuteron	3.34358335e-27
helion	5.00641214e-27
alpha	6.6446565e-27

On s'intéresse uniquement :
Aux valeurs qui sont > 1 (on verra plus loin pourquoi).
Celles qui sont présentes dans la table CODATA 2002.
Celles qui sont suffisamment définies parce que les particules élémentaires est un zoo.

Selon le modèle dit standard, il n'y a que la particule tau, muon et l'électron qui soient suffisamment connus pour émettre l'idée d'une expression mathématique et si on tient compte de la précision numérique il ne reste que tau/électron.

… Je me borne ici à expérimenter avec les 28 valeurs du CODATA seulement.

Chaque expérience de mesurage est une longue série d'expériences assez complexes qui demande un outillage précis pour chaque mesure. En effet certaines particules sont chargées, d'autres neutres, etc. En d'autres mots il ne suffit pas de prendre les masses et de faire le ratio. Les données du CODATA sont le fruit d'une expérience pour chaque entrée. Des centaines de personnes ont travaillé à ces expériences et la compilation des données a pris 1 année complète (Déc 2002 à décembre 2003).



Le premier modèle :

Les particules sont des boules, sphères de dimension 3, 4, 5 ?

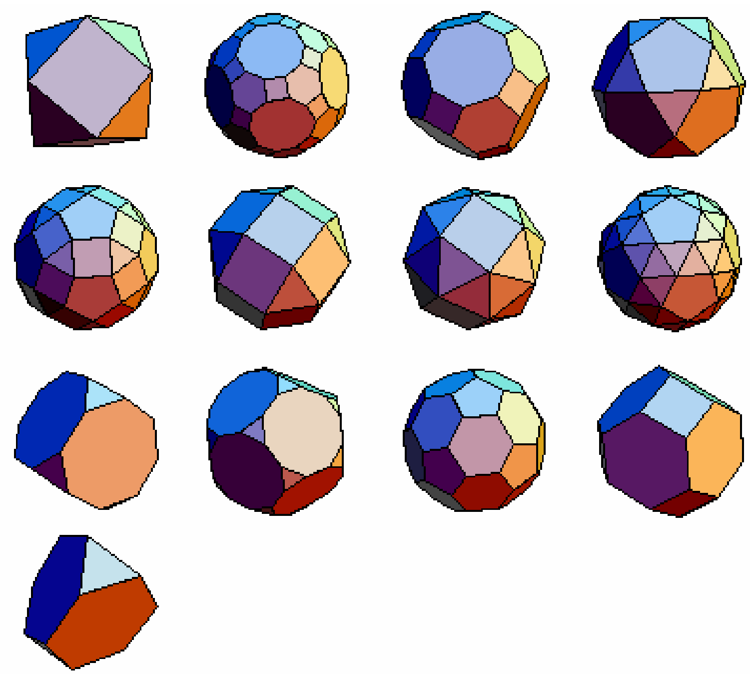
Si tel est le cas alors en vertu de :

Le volume de toute sphère, de toute terre
quelle soit de pierre ou de bois,
est égal au quatre-tiers de pi, r^3.

C'est lié aux valeurs de la fonction Gamma et des puissances de pi/2.

Une analyse sommaire ne donne rien en ce sens. Cette idée est celle de Feynman généralisée en fait. Expérimentalement on obtient rien de bon si ce n'est que la valeur de Feynman est 40663 * e, e étant l'erreur de la table. (je vous fais grâce des millions d'expressions obtenues mais rejetées).

Le $2^{\text{ème}}$ modèle : Ce sont des solides archimédiens comme ceux-ci : Ils sont des polyèdres semi-réguliers et il y en a 13 ce qui est treize-intéressant.



Les longueurs de segment, de volume et de surface sont des nombres algébriques comme ceux-ci.

$\frac{1}{241}(105+6\sqrt{5})\sqrt{31+12\sqrt{5}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{30+12\sqrt{5}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{31+12\sqrt{5}}$ $\frac{3}{97}(14+\sqrt{2})\sqrt{13+6\sqrt{2}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{12+6\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{13+6\sqrt{2}}$

$\frac{1}{8}(5+3\sqrt{5})$ $\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

$\frac{1}{41}(15+2\sqrt{5})\sqrt{11+4\sqrt{5}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{10+4\sqrt{5}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}$

$\frac{1}{17}(6+\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}$

$\frac{1}{17}(5+2\sqrt{2})\sqrt{7+4\sqrt{2}}$ $\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})$ $\frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{2}}$

$\frac{5}{488}(17\sqrt{2}+3\sqrt{10})\sqrt{37+15\sqrt{5}}$ $\frac{1}{4}(5+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{4}\sqrt{74+30\sqrt{5}}$ $\frac{9}{872}(21+\sqrt{5})\sqrt{58+18\sqrt{5}}$ $\frac{3}{4}(1+\sqrt{5})$

$\frac{1}{4}\sqrt{58+18\sqrt{5}}$

Donc le ratio devrait être du même acabit.

Même acabit est facile à dire mais passablement plus difficile à rejeter pour plusieurs raisons.

Par exemple on obtient cette expression pour Mn/Mp.

Mp/Mn ≈ cos(pi/60) = 1.001372346…

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{16}+\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}+\frac{\sqrt{10}}{16}\right)\sqrt{3}+\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{16}-\frac{\sqrt{10}}{16}$$

Belle expression qui n’est pas très précise comparée à la vraie valeur. Elle doit être rejetée à cause du terme d’erreur, il est de 10462*e.

Tout de même, ce nombre algébrique est racine d’un polynôme de degré 24.
C’est l’une des racines de Tchébycheff(30,x).

Le polynôme est assez monstrueux comparé à la simplicité de l’expression de cos(pi/60).

Indétectable avec les méthodes de calcul ici qui sont limitées à 11 chiffres décimaux.

Il est irraisonnable de pouvoir détecter les racines d'un polynôme de degré 24, 30 ou 60 avec une précision aussi faible. Les méthodes de calcul moderne demandent 100, 250 ou même 500 décimales de précision. Une règle du pouce dit qu'il faut d^2 décimales pour détecter un polynôme de degré d. Donc : degré 24 = 576 décimales si on veut que la réponse ait du sens en terme de taille par rapport au degré.

On ne peut exprimer les valeurs comme 7294.2995363.

C'était une bonne piste mais c'est la seule expression trouvée qui soit courte, élégante et qui concorde avec l'un des modèles archimédiens. Les autres ratios ne sont loin d'avoir des expressions aussi simples.

Pour être certain de ne pas passer à côté de belles expressions il aura fallu construire des tables spécialisées de nombres algébriques (245 million d'entrées) et utiliser LLL-PSLQ avec 11 décimales pour finalement rejeter toutes les expressions.
Mes ordinateurs ont mouliné des chiffres pendant des mois.

Note : Avec 11 décimales on peut tester 3,4,5 entrées à la fois. Plus le nombre d'entrées est élevé moins fiable est la réponse.

Le 3ème modèle :

On rejette donc ici que les sphères ou solides soient faits de matière uniforme comme de la guimauve. Ce qui est une idée tout à fait naïve.

C'est l'une des suites du OEIS prise à +/-1, exp(-Pi) ou exp(-2Pi), etc.

On a 98500 suites dans le catalogue si on compte celles qui ont des signes également et la conversion d'une suite vers un réel peut se faire d'au moins 18 façons différentes.
On suppose que le ratio Ma/Mb est par exemple

$$\frac{Ma}{Mb}=\sum_{n=0}^{k}a(n)x^n,$$

$$\frac{Ma}{Mb}=\sum_{n=0}^{k}\frac{a(n)x^n}{n!},$$

$$\frac{Ma}{Mb}=\sum_{n=0}^{k}\frac{a(n)x^n}{(n!)^2},\ldots$$

Ici le modèle est imprécis on suppose que la relation ou expression inconnue resortira grâce aux croisements avec le reste des tables. Le critère de la longueur a été utilisé et aussi le fait que les plus intéressantes suites ont été cataloguées à la date de 1995 et moins.
Les numéros de suites > 10000 ont moins d'intérêt, moins de poids.

En tout, 13 millions d'entrées ont été générées avec les suites du OEIS (bonnes et mauvaises).

Résultat : rien n'est resorti pour aucun des ratios même si la table OEIS représente à peu près tous les motifs combinatoires connus et répertoriés et d'évaluer ces séries aux points mentionnés risquait fort de produire une bonne fournée de candidats mais ça n'a pas marché.

Le 4ème modèle :

Suites de partages, fonctions de Rogers-Ramanujan généralisées, expressions avec exp(2*Pi/5) et autres valeurs.

On suppose que le ratio est une fonction de partage unique F(x). On peut le faire grâce à un théorème du à Hardy.

Vers 1913 un certain Ramanujan envoya une lettre à un certain Hardy qui tomba littéralement de sa chaise. La lettre contenait quelques formules dont celle-ci.

Si $R(x) = \frac{x^{1/5}}{1+}\frac{x}{1+}\frac{x^2}{1+}\frac{x^3}{1+}\frac{x^4}{1+}\frac{x^5}{1+}\cdots$ est une fraction continuée alors lorsque x = $e^{-2\pi}$ alors

R($e^{-2\pi}$) = $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, si x=1 on a la fraction continuée du nombre d'or $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

et si S(x) = -R(-x) alors

S($e^{-\pi}$) = $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Une fois relevé de sa chaise, il lit plus loin…
De plus R(x) est un produit infini comme suit : (ici j'ai pris z).

$$\frac{z\left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^{(5i-3)})(1-z^{(5i-2)})}\right)^5}{\left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^{(5i-4)})(1-z^{(5i-1)})}\right)^5}$$

Si on veut ce sont des partages d'entiers pris 5 par 5.

L'hypothèse assez audiacieuse serait que les électrons, protons et neutrons sont en fait des 'amas' de petites boules en nombre infini et que de craquer des protons pour trouver des quarks et autres morceaux sont en fait des identités avec des partages selon une certaine règle et qu'en fait la valeur qu'on a pour 1.00137841870 est en fait 1+ 1/exp(2*Pi) - 1/(4*exp(2*Pi))… une certaine expression avec des partages (infinis).

Que l’expression 1.00137841870 serait la donnée d’un produit infini évalué à un point comme exp(-2*pi).

Cela revient à exprimer le nombre 1.00137841887… en base exp(-2*Pi) ?

Ce n’est pas exactement ça mais pour la précision utilisée cela revient au même. C’est une torsion mathématique assez énorme mais si on n’a que 11 décimales le débat est peut-être bysantin ou capillo-tracté.

Mais il y a un problème : on ne peut connaître que le ratio entre 2 masses et non pas la donnée d’une seule fonction évidemment. En d’autres mots ça devrait être quelque chose qui est F(x)/G(x) et F, G sont des fonctions inconnues d’un partage quelconque.

Quelques part dans les *collected papers vol. 5* de Hardy il y a cette remarque :

Quelques soit la fonction de partage et les combinaisons de celle-ci on peut toujours exprimer les partages avec la fonction de base suivante ;

$$\prod_{n=1}^{\text{infini}} \frac{1}{1 - x^{n}}$$

Détails techniques en moins, l’énorme expression avec 2 produits infinis peut s’exprimer simplement avec 1 seule fonction pourvu qu'on connaisse l'argument.

Mathématiquement ça revient à dire que si on a un machin même compliqué tel que celui-ci

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^{(5i-3)})(1-z^{(5i-2)})}\right)^3 \left(\prod_{i=1}^{\infty} (1-z^{(10i-5)})\right)^2 \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1-t^{(6i-4)})(1-t^{(6i-3)})^2(1-t^{(6i-2)})}{(1-t^{(6i-5)})(1-t^{(6i-1)})(1-t^{(6i)})^2}\right) \Big/ \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^{(5i-4)})(1-z^{(5i-1)})}\right)^2$$

Il s'exprime simplement avec la fonction de base (j'utilise GFUN + inversion de Mobius).

En d'autres mots : même si on cherche un ratio de 2 fonctions de partage quelconques, quelqu'elles soient on peut la remettre à l'endroit et l'exprimer avec 1 seule fonction (pourvu qu'on ait le bon argument).

Si le modèle est bon on devrait trouver que pour le nombre exp(-2*pi) pour une certaine fonction de partage la donnée pourrait valoir exactement 1.00137841870… et même les autres comme 1836.15267261 et 1838.6836598…

Et si c'est vrai alors on pourra faire exactement la même démarche que Mendéleev et PRÉDIRE les masses des autres particules du zoo.

En revenant avec la variable z on peut trouver que la combinaison de fonction élémentaires est

$$-\frac{(z+1)(z^2-z+1)}{(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)}$$

Si le produit de base est [1,1,1,1,1,1,….] alors l’expression ci-haut est le développement en série de cette expression. (détails techniques en moins).

Alors pour détecter une expression utilisant ce modèle j’ai fabriqué des tables spécialisées encore et celles du OEIS ont été mises à partie, évaluées en exp(-2*pi), et des arguments tels qu’on les trouve dans les Ramanujan Notebooks I-V sans rien trouver du tout. C’est proche mais rien n’en est sorti qui soit remarquable ou proche de l’être.

Un peu d’historique.

Cette idée de trouver une expression mathématique pour ces ratios n’est pas nouvelle. Les grands de la physique se sont essayés aussi comme Eddington qui travaillait de pair avec Einstein mais ce dernier s’est désisté vers la fin à cause de l’implication ésotérique d’Eddington.

À mesure que la valeur de la constante de structure fine a été connue avec une meilleure précision (passant de 136 à 137), Eddington a changé sa théorie. Il a été quelque peu ridiculisé au point qu’on le surnommait Sir Arthur Adding-One.

Il y a Feynmann qui a lancé que Mp/Me = $6\pi^5$ = 1836.118107… c’est intéressant mais faux, $6*pi^5 + 328/pi^8$ est plus précis mais…

Dirac disait qu’il est illusoire d’essayer de trouver une expression mathématique fixe.

Aspden et Eagles ont sorti des expressions vers 1972 et un certain Good en 1957 mais étant donné le peu de précision et aussi les moyens techniques utilisés ces expressions sont restées du folklore.

En fait ce travail est ingrat et risque de ne rien donner si ce n'est que quelques candidats sans modèle précis. Mais il faut bien que quelqu'un fasse l'exercise 1 fois de comparer avec tout ce qu'il y a de connu et de proposer la meilleure expression mathématique sans tenir compte du contexte physique nécessairement.

-L'inverseur de Plouffe avec 610 millions d'entrées.
-Les données du OEIS de Sloane. (et aussi Plouffe).
-Les données du livre de Steven Finch, 797 constantes réelles connues avec au moins 10 chiffres exacts, j'ai scanné le livre moi-même.

- Google aussi a été mis à partie avec un programme robot lancé de la maison mais qui va lentement exprès, j'ai pu ramasser des milliers de pages d'articles en cherchant 1836.152 seulement.

Le 5ème modèle :

La meilleure expression qui soit générale prise dans toute la table.

On part ici du principe que quelque soit l'expression trouvée on devrait avoir le même genre d'expression pour au moins une partie des autres ratios.

Une idée intéressante qui donne des valeurs prometteuses mais qui n'ont aucun motif.

Voici 2 modèles rejetés :

Modèle 5a : Ça tourne autour de la valeur $(23 + 6^{1/4})$. Si A = $(23 + 6^{1/4})$ alors on a

$\dfrac{A^{1/3}}{11^{4/9}}$	$\dfrac{2 \cdot 5^3 \cdot 13 A^{1/2}}{17 \cdot 3^{1/2} 7^{1/2}}$	$\dfrac{3 \cdot 11^{5/3} A^{1/2}}{2^3 \cdot 5 \cdot 53}$
$\dfrac{2^9 \cdot 5^{7/3} A^{1/2}}{59}$	$\dfrac{2^{-7/4} \cdot 3^{-3/4} A^{1/2}}{5^2 \cdot 17}$	$\dfrac{2^{19/4} 5^2 A}{3^2}$
	$\dfrac{2^4 \cdot 5^3 \cdot 41}{3^2 A^{1/2}}$	$\dfrac{11^{-2/3} A}{2^5 3^2 5^4}$

Mais ici le nombre $(23 + 6^{1/4})$ n'a rien de spécial, il n'apparaît pas dans les tables si ce n'est que par pur hasard. Il n'apparaît pas dans les Ramanujan Notebooks ni dans la littérature comme Mathematical Constants de S. Finch.
Conclusion : rejeté.

Modèle 5b : Ce sont des valeurs balancées autour des exponentielles comme exp(-3pi), exp(-2pi), exp(-1), 1, exp(pi), exp(2pi), exp(3pi).

Ce qui donne beaucoup plus de données mais sans motif général (et encore moins d'explication). Rejeté également.

La liste des candidats es assez longue mais aucun ne semble ressortir.

Ici l'idée naïve était que par exemple :

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^4} = \frac{15}{2\pi^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{c=4}^{\infty} \frac{1}{c^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{15}{2\pi^4} - 1$$

En d'autres termes, la somme des inverses des nombres composés est une relation linéaire en π^4 ,$1/\pi^4$ et 1. Une bonne idée mais qui ne fonctionne pas non plus.

La raison de ce choix est qu'on peut dire que la constante d'Euler (0.5772156649…) est en fait le potentiel en 0 de charges placées en 1,2,3,…,. Il existe des raisonnements semblables pour $\zeta(k)$.

6$^{\text{ème}}$ Modèle :

Avec les expressions les plus courtes mais les plus exactes possibles.

$$\frac{4\sqrt{2}}{45}\pi^{\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{2}}$$

$$\frac{2(3e+1)}{3e+10+3e^{-\pi}}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{19}-\frac{1}{23}-\frac{1}{29}-\frac{1}{31}+\frac{1}{37}-\frac{1}{41}-\frac{1}{43}+\frac{1}{47}$$

$$e^{-\frac{1}{2}+\frac{17\sqrt{11}}{30}}$$

$$\frac{10^{2/3}23^{1/6}\left(20-7^{2/3}\right)^{2/3}}{5}$$

$$\frac{336(18+\sqrt{2})^{1/2}\pi^3}{25},\ \frac{M\alpha}{Me}\approx\frac{11\phi^{17}}{\sqrt{29}}$$

Conclusion : Rejeté également parce qu’il n’y a pas de motif.

Le dernier modèle :

En cherchant l'expression la plus courte possible je suis tombé sur

$$\frac{M\alpha}{Me} \approx \frac{11\phi^{17}}{\sqrt{29}} = 7294.299\ldots$$

C'est le ratio de masse de la particule alpha et l'électron. Ici c'est précis (en deça de l'erreur normale), assez élégant et court et surtout : 11 n'est-ce pas un nombre de Lucas?
C'est L(5) mais aussi 11 ≈ φ^5 , et 29 ≈ φ^7.
En fait c'est φ en déguisé tout ça.

Oui si on simplifie on a

Malpha/Mélectron ≈ $\varphi^{37/2}$

Mais $\varphi^{37/2}$ n'est vraiment pas égal à 7294.299 non plus c'est plutôt 7349….

Ah oui : ces expressions sont non-linéaires en fait puisque $\frac{F_n\sqrt{5}}{L_n} \approx \frac{L_n}{\phi^n} \approx \frac{F_n\sqrt{5}}{\phi^n} \approx 1$.

C'est proche de 1 mais pas exactement et on peut travailler des familles d'approximations de cette façon sans jamais en trouver la fin.

Si on compare des expression trouvées avec les autres on a le même genre de simplicité.

Par exemple avec Mn/Mp = 1.00137… on trouve

$$\frac{L_9 L_6^{\ 1/2}}{\phi^{12}}, \frac{\phi^6 L_6^{\ 1/2}}{F_9\sqrt{5}}, \frac{L_9 L_6^{\ 1/2}}{F_6\sqrt{5}}, 1+\frac{21^{3/14}}{L_4 L_{11}}$$

Et à chaque fois qu'on a une expression qui fait intervenir Fn, Ln ou phi on peut toujours ramener à une série d'approximations en remplaçant avec l'une des 3 transformations de base.

Comme avec :

$$\frac{F_k 47^{1/23}}{L_k}, \frac{L_k 5^{3/10}}{F_{k+4}}, \frac{F_k 7^{1/3}}{L_k}, \frac{F_k 123^{10/23}}{L_{k+4}} \dashrightarrow \frac{Mneutron}{Mtau}.$$

Ce qui nous donne le tableau suivant des meilleures trouvées selon le modèle.

Neutron-Proton	1.00137841870	$1+\frac{21^{3/14}}{L_4 L_{11}}$
Alpha particle-Electron	7294.2995363	$\frac{L_5 \phi^{17}}{L_7^{1/2}}$
Tau-Muon	16.8183	$\frac{\phi^9 L_{10}^{1/11}}{L_4}$
Helion-Proton	2.9931526671	$\frac{\phi^{13} L_3^{1/18}}{L_3 L_8}$
Neutron-Electron	1838.6836598	$\phi^{5/21} F_{11}^{34/21} (\frac{F_9}{2})^{1/21}$
Proton-Electron	1836.15267261	$\frac{F_{10} F_5^{3/2} L_5^{15/32}}{\phi^{1/16}}$
Muon-Electron	206.7682838	$\frac{L_2^3 L_5^{23/20}}{\phi^{3/2}}$
Neutron-Muon	8.89248402	$\frac{L_5 F_5^{11/5}}{\phi^{39/5}}$
Proton-Muon	8.88024333	$\phi^{37/30} F_5^{7/15} L_5^{7/20}$
Helion-Electron	5495.885269	$\frac{L_9 \phi^{13}}{L_5^{14/17}}$

Alpha-particle-Proton	3.97259968907	$\frac{\phi^{25/7} F_8^{10/21} L_2^{1/7}}{L_4}$
Deuteron-Electron	3670.4829652	$L_2^{3}\phi^{8/29} L_8^{36/29}$
Tau-Proton	1.8939	$\frac{\phi^4 F_8}{L_9}$
Tau-Neutron	1.89129	$\frac{F_7 \phi^2}{L_6}$

Conclusion :

Aucune expression plus simple n'a été trouvée.

Est-ce une réponse à la question : non pas définitivement mais c'est une réponse mathématique simple et c'est ce qu'on voulait trouver.

On rencontre le nombre φ^5 dans le modèle de Baxter pour les hexagones durs et φ dans tout ce qui pousse après tout.

Voici un parallèle,

On prend un champ de marguerites, selon un catalogue sur internet (avec photos) il y a pas moins que 338 sortes de marguerites mais essentiellement la marguerite standard a 21 ou 34 pétales.

Si donc on prend le champ au complet on aura des fleurs avec 22, 33 ou 20 pétales quelques fois MÊME si le modèle est vrai et connu il n'en reste pas moins que c'est le plus souvent 21 ou 34 mais pas tout le temps. C'est une analogie avec les valeurs autour des ratios qui sont des expressions valides pour l'erreur autour d'une valeur fixe mais pas exactement déterminée. Je crois que cette réponse est la meilleure réponse mathématique possible.

Analyse des relations

$$\frac{F_n\sqrt{5}}{L_n} \approx \frac{L_n}{\phi^n} \approx \frac{F_n\sqrt{5}}{\phi^n} \approx 1$$

$$\frac{{L_a}^{p/q}}{{L_b}^{r/q}} \approx \frac{(\sqrt{5}F_a)^{p/q}}{(\sqrt{5}F_b)^{r/q}} \approx \frac{L_a L_b}{L_{a+b}} \approx \frac{F_a F_b \sqrt{5}}{F_{a+b}} \approx 1$$

Ces relations sont proches de 1 et non-linéaires, par exemple l'expression

$$\frac{M\alpha}{Me} \approx \frac{11\phi^{17}}{\sqrt{29}}$$

N'est pas une approximation de log(7294.2995363)/log(phi) c'est une relation linéaire avec

log(Malpha/Me),log(11), log(29) et log(phi). Et si on veut en trouver d'autres du genre il faut prendre

Log(ratio), log(p) et p est un facteur de Ln ou Fn et prendre plusieurs p.

Mais si on veut l'expression la PLUS simple, la plus courte et aussi la plus précise on est amené à créer les tables quand même à cause essentiellement d'une faiblesse des algorithmes LLL-PSLQ qui se 'plantent' pour une relation du genre :

Avec [1, √5, φ^{48}] le programme répond [-1791659574, 1, -4006272456]

Quand en fait la vraie bonne réponse devrait être [5374978561, 2403763488, -1] qui est une combinaison linéaire de F(48), √5 et F(47).

Oui parce que φ^{48} est proche d'un entier et on aura ce même genre de phénomène à chaque fois qu'un irrationnel est proche d'un entier, pour l'algorithme LLL-PSLQ c'est une trappe numérique, un minimum local.

D’autres exemples existent comme {exp(1)*n!} tend vers 0 mais pas avec suffisamment de conviction avec n pour faire planter le programme. L’erreur est de l’ordre de 1/n. C’est pour cette raison que j’ai construit toutes ces tables.

Références : article sur Internet à ma page maison.

En passant, on obtient une réponse différente si on prend
$[1, \sqrt{5}, \varphi^{48}]$ plutôt que
$[\sqrt{5}, 1, \varphi^{48}]$ et ce phénomène se rencontre dans au moins 2 programmes du genre LLL-PSLQ.

Règle du pouce : ne PAS mettre le 1 comme première valeur.