

10/05/98

J.-P. Delahaye

Reconnaître les constantes :
l'inverseur de Plouffe

être certain sans démontrer ?

75 millions des constantes fondamentales !

ou

L'ordinateur : une machine à explorer le
monde mathématique

Jean-Paul Delahaye

Université des Sciences et Technologies de Lille

Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, URA. CNRS 369, Bât M3

59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

tel : 03-20-43-47-22 (université)

tel : 03-20-22-17-29 (domicile)

fax : 03-20-43-65-66

e-mail : delahaye@lifl.fr

Le tableau de Mendeleïev des constantes mathématiques

Identifier les constantes mathématiques nécessite des tables
numériques, de bonnes idées et d'excellentes machines

De nouvelles pratiques expérimentales en mathématiques

L'ordinateur est l'accélérateur de particules du
mathématicien

À la suite de divers calculs numériques, par exemple pour l'intégrale de $\sin(77x)\sin(5x)/x^2$ entre 0 et l'infini, on a trouvé la valeur approchée suivante :

$$M \sim 7,853981634$$

On soupçonne que M possède une expression simple. C'est peut-être :

- une fraction p/q avec p et q entiers ;
- ou une fraction multipliée par $\sqrt{2}$ (c'est-à-dire quelque chose de la forme $p\sqrt{2}/q$ avec p et q entiers) ;
- ou une fraction multipliée par Pi (quelque chose de la forme $p \text{ Pi} / q$ avec p et q entiers) ;
- ou une fraction multipliée par e (quelque chose de la forme $p e / q$ avec p et q entiers). Rappelons que la constante e vaut 2,71828182845904523... C'est l'une des constantes le plus fréquemment rencontrée en mathématiques avec Pi. On peut définir e comme la somme infinie des inverses des factoriels $e = 1+1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots$ ou comme la limite quand n tend vers l'infini de $[(n+1)/n]^n$.

Comment faire pour reconnaître M ?

Première méthode : énumération et comparaison

La première idée consiste à calculer tous les nombres p/q , $p\sqrt{2}/q$, $p\text{Pi}/q$, pe/q puis à rechercher celui qui se rapproche le plus de M.

Il y a une infinité de tels nombres et parmi eux certains sont aussi proches qu'on le veut de M. Abordons donc le problème progressivement en faisant le pari que la solution n'utilisera pas une fraction p/q très compliquée. Essayons en supposant que p et q sont tous les deux compris entre 1 et 10.

Cela fait 100 essais pour comparer M aux nombres de la forme p/q , 100 autres pour ceux de la forme $p\sqrt{2}/q$, etc. Il y a donc au total 400 essais à faire. Si on ne trouve rien, il faudra essayer en faisant l'hypothèse que p et q sont tous les deux des entiers situés entre 1 et 100. Cela conduira alors à 40 000 essais. Puis si nécessaire on passera à l'intervalle de 1 à 1000 ce qui conduira à 4 millions de calculs, etc. Le nombre d'essais en fonction de

l'intervalle de recherche de 1 à n augmente très rapidement (précisément comme le carré de n).

Ici, dès la première tentative, avec p et q entre 1 et 10, on découvre que parmi les 400 nombres essayés pour approcher M, le nombre $5\pi/2$ se trouve situé à un milliardième de M alors que les 399 autres nombres sont tous situés à une distance de M plus grande que un dixième (le plus proche est $8/1$ situé à 0,15 de M).

Vérité probable ?

N'a-t-on pas une bonne raison de croire que M est exactement $5\pi/2$ et que ce sont les erreurs de calcul et d'arrondi qui expliquent qu'il n'y a pas une égalité parfaite ?

La question est très délicate et constitue le coeur d'une certaine pratique expérimentale des mathématiques dont nous allons parler. Que $5\pi/2$ ressemble fort à M n'est bien sûr pas une preuve mathématique rigoureuse que les deux nombres sont égaux. On sent cependant qu'on prend peu de risque en acceptant d'identifier les deux nombres. On peut raisonner ainsi.

“Si M était choisi au hasard entre 0 et 40 (tous les nombres que nous considérons sont dans cet intervalle) alors la probabilité pour qu'il se trouve à un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait inférieure à :

$$400 \cdot 2 \cdot 10^{-9} / 40 = 2 \cdot 10^{-8}$$

car la longueur totale de l'intervalle considéré est 40 (les cas possibles) et qu'il y a 400 petits intervalles chacun de longueur $2 \cdot 10^{-9}$ correspondant aux cas favorables (les nombres situés à moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés) ce qui au total constitue un ensemble d'intervalles d'une longueur cumulée de $400 \cdot 2 \cdot 10^{-9}$.

Si M était choisi au hasard, la probabilité de le trouver aussi proche d'un des 400 nombres essayés serait donc inférieure à $2 \cdot 10^{-8}$. C'est vraiment très peu, donc ce n'est pas par hasard que cela s'est produit, c'est parce que M vaut $5\pi/2$.”

Ce raisonnement n'est pas adapté ici car M n'est pas tiré au hasard. L'utilisation du modèle probabiliste (ou d'autres modèles du même genre

basés sur la formule de Bayes des probabilités conditionnelles) ne prouvent rien dans l'absolu. Il s'agit de ce qu'on appelle un raisonnement heuristique : il guide l'intuition, il donne une forte présomption, incite fortement à penser... mais il ne démontre pas !

Seconde méthode

La méthode par énumération et comparaison n'est pas très efficace en pratique si on dispose de peu d'informations sur le nombre qu'on cherche à reconnaître ou si on a moins de chance que dans l'exemple précédent et qu'on est obligé d'aller explorer des valeurs de p et q plus grandes.

Une idée naturelle différente est de calculer $M/\sqrt{2}$, M/π et de M/e et de multiplier les quatre nombres M , $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e par $q = 1, 2, 3, \dots, 10$, en regardant à chaque fois si le résultat est un entier (si par exemple pour $q = 2$ je trouve que $q M/\pi \sim 5$ cela signifiera que vraisemblablement $M \sim 5\pi/2$).

Si on recherche comme tout à l'heure le nombre M en imposant à p et q d'être entre 1 et 10 cette méthode conduit à faire 43 multiplications (trois au départ, puis 10 pour chaque nombre). Pour p et q entre 1 et 100 il y a 403 multiplications à faire, etc. L'augmentation est plus modérée que précédemment.

Cette seconde méthode est plus efficace que la première, elle aboutit bien plus rapidement au résultat que vraisemblablement M vaut $5\pi/2$. Bien sûr comme avec la première méthode on n'obtient qu'une forte présomption.

Troisième méthode : repérage de période

Une troisième idée consiste à utiliser qu'un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain moment. On pourrait donc tenter de reconnaître la période de M , $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e . On serait amené à faire quatre multiplications puis quatre recherches de périodes ce qui semble encore meilleur que la seconde idée. Malheureusement la période du développement d'un nombre p/q peut être de longueur $q-1$. C'est le cas par exemple pour p/q avec $0 < p < q$ et $q = 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193$ (il s'agit de ce qu'on appelle les entiers premiers longs, voir article du mois d'avril). Cela veut dire que si $M = 13/109$ on ne reconnaîtra la période que si on dispose de

sensiblement plus de 109 chiffres (disons 200) ce qui risque de se produire rarement.

Même si elle apparaît astucieuse dans un premier temps la méthode du repérage de période est mauvaise car elle demande trop de chiffres pour aboutir.

Les fractions continues

La quatrième idée (qui va nous conduire aux techniques les plus modernes de l'identification des constantes) provient d'une méthode ancienne de recherche d'approximations des nombres par des fractions disposées sur de multiples étages et appelées *fractions continues*. Elle mérite qu'on s'y arrête un moment.

Les fractions continues sont des expressions de la forme :

$$a_0 + \frac{1}{a_1} \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} \dots$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{\dots}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}}$$

où a_0, a_1, \dots sont des nombres entiers positifs.

On considère la limite de ces expressions, c'est un nombre qu'on peut voir comme une sorte de *fraction infinie*. On le note :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{\dots}{\dots + \dots}}}}$$

On utilise aussi la notation plus commode, sur une seule ligne :

$$a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(a_3 + \dots + 1/(a_n + \dots))))$$

ou même : $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$

L'idée qui conduit à ces fractions "infiniment profondes" est le désir d'écrire un nombre M sous la forme d'un entier (sa partie entière) suivi d'un nombre plus petit que 1 (sa partie fractionnaire). Par exemple :

$$e = 2 + 0,718281828\dots$$

Si on recommence avec l'inverse de la partie fractionnaire (qui est plus grand que 1) en l'écrivant lui aussi sous la forme d'un nombre entier suivi d'un nombre plus petit que 1, on obtient :

$$e = 2 + 1 / (1,392211\dots) = 2 + 1/ (1 + 0,392211\dots)$$

puis en recommençant encore :

$$e = 2 + 1/ (1 + 1/2,5496) = 2 + 1/ (1 + 1/ (2 + 0,5496))$$

En continuant, on écrit le développement en fraction continue du nombre e . Il se poursuit jusqu'à ce qu'on obtienne quelque chose qui tombe tout rond (dès qu'un terme calculé est un nombre entier) ou jusqu'à l'infini.

Le développement en *fraction continue* d'un nombre est une représentation très intéressante de ce nombre (comme le sont les développements *décimaux* et *binaires*). Cette représentation fait apparaître sa nature mieux que le développement décimal car on a les remarquables résultats (a) (b) et (c) indiqués plus bas. Ces propriétés ont été prouvées aux 17^e et 18^e siècles par Christiaan Huygens (qui utilisa les fractions continues pour calculer le nombre de dents des roues des mécanismes d'horlogerie qu'il concevait pour une horloge astronomique), par Léonard Euler et Joseph Louis Lagrange.

(a) Un nombre x est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est fini. Exemples :

$$3/11 = [0, 3, 1, 2] = 1 / (3 + 1 / (1 + 1/2))$$

$$119/57 = [2, 11, 2, 2] = 2 + 1 / (11 + 1 / (2 + 1/2))$$

$$13/109 = [0, 8, 2, 1, 1, 2] = 1 / (8 + 1 / (2 + 1 / (1 + 1 / (1 + 1/2))))$$

(b) Un nombre x est de la forme $\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{r}{s}}$ avec p, q, r et s entiers (c'est-à-dire

est la racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, un tel nombre est dit *quadratique*) si et seulement si son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain point. Exemples :

$$\sqrt{2} = 1 + 1 / (2 + 1 / (2 + 1 / (2 + 1 / (2 + \dots)))) = [1, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

$$\sqrt{7} = 2 + 1 / (1 + 1 / (4 + 1 / (1 + 1 / (1 + \dots)))) = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$$

$$1/2 + \sqrt{1/3} = 1 + 1 / (12 + 1 / (1 + 1 / (12 + 1 / (1 + \dots)))) = [1, 12, 1, 12, 1, 12, \dots]$$

(c) Certains nombres transcendants (par définition ils ne sont pas solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) ont un développement en fraction continue qui suit une règle clairement identifiable. Le nombre e qui est transcendant s'écrit ainsi :

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, \dots]$$

On voit bien la règle. Pour $2e$ et e^2 les régularités demandent un peu plus d'attention. Trouvez-les.

$$2e = [5, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 4, 3, 1, 4, 1, 3, 6, 3, 1, 6, 1, 3, 8, 3, 1, 8, 1, 3, 10, 3, 1, 10, \dots]$$

$$e^2 = [7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, 9, 42, 11, 1, 1, 12, 54, 14, 1, 1, 15, 66, 17, 1, 1, 18, 78, 20, 1, 1, 21, 90, 23, 1, 1, 24, 102, 26, 1, 1, 27, 114, 29, 1, 1, 30, 126, \dots]$$

Si on tombe sur une fraction continue infinie et non périodique ayant une règle bien claire (c'est le cas des trois exemples précédents), l'utilisation des résultats (a) et (b) nous donne une très sérieuse raison de croire que le

nombre est irrationnel et non quadratique (irrationnel car ayant une fraction continue infinie, non quadratique car ayant une fraction continue non périodique). Le mathématicien qui, par exemple, aurait calculé les 60 premiers coefficients de la fraction continue de e et aurait vu tout le long 2 1 2 1 1 4 1 1 6 1 1 8 1 1 10 1 1 12 jusqu'à 1 1 40 ne pourrait pas croire que cela peut changer plus loin ; il aurait donc une conviction totale que e n'est ni rationnel, ni quadratique... mais pas de démonstration.

Cette situation illustre plus nettement encore que notre premier exemple qu'on peut avoir de fortes raisons de croire un certain résultat mathématique, sans en avoir la moindre preuve. En mathématiques il existe des situations où le bon sens nous commande de croire une certaine vérité que nous sommes pourtant incapable de prouver d'une façon qui satisfasse un mathématicien classique.

L'objectif des mathématiciens expérimentalistes est justement de rechercher des vérités mathématiques par tous les moyens y compris informatiques, de collecter le plus possible de raisons de croire aux vérités découvertes et, si c'est possible, de les démontrer au sens habituel qui reste la seule façon d'avoir des certitudes parfaites (personne ne le conteste).

Leur philosophie est qu'il vaut mieux connaître une relation mathématique qu'on ne sait pas prouver, que l'ignorer. Lorsqu'en cryptographie on fabrique des nombres premiers par des méthodes probabilistes (qui ne garantissent pas entièrement que les nombres produits sont premiers) on parle de *nombres premiers à usage commercial*. Par analogie on pourrait dire que les mathématiciens expérimentalistes s'intéressent *aux vérités mathématiques à usage commercial*.

Notons que contrairement au développement de e ou de racine de 2, le développement en fraction continue du nombre π malheureusement ne présente pas de régularité apparente.

$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, \dots]$

Quatrième idée pour identifier les constantes

Les fractions continues fournissent la meilleure méthode pour résoudre notre problème d'identification de M : prendre les quatre nombres M , $M/\sqrt{2}$,

10/05/98

J.-P. Delahaye

M/pi et M/e et calculer leur développement en fractions continues jusqu'à ce qu'un terme soit presque entier (ce qui signifiera qu'on est très proche d'un nombre rationnel).

Ici en s'arrêtant :

- soit au dixième terme du développement en fraction continue,
- soit lorsque qu'on a un entier à 10^{-5} près,

on obtient les résultats suivants.

Pour M : [7, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 2, 28, 1, 26] rien n'est trouvé ;

Pour M / $\sqrt{2}$: [5, 1, 1, 4, 6, 9, 1, 2, 1, 2, 5] rien n'est trouvé ;

Pour M / Pi : [2, 1, 1+1/765855891] ~ [2, 1, 1] = $2+1/(1+1/1) = 5/2$;

Pour M / e [2, 1, 8, 28, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 48] rien n'est trouvé.

Le fait numérique que pour M / Pi on ait trouvé, à très peu près, la fraction 5/2 nous montre à nouveau que vraisemblablement M/Pi vaut 5/2, c'est-à-dire que M vaut 5 Pi/2.

Pour s'assurer de la validité de notre méthode (c'est-à-dire pour avoir de meilleures raisons encore de croire que M vaut 5Pi/2) on calcule non plus 10, mais 20 termes des fractions continues (ce qui correspond à des millions d'essais de constantes) on trouve cette fois deux candidats pour M. Le premier est toujours 5Pi/2.

Le second est le nombre rationnel : 3926990817/500000000 (qui est le résultat de la simplification de $7,853981634 = 7853981634 / 1000000000$ par 2).

Entre les deux candidats le plus simple est sans hésitation possible 5Pi/2, c'est lui qu'on retiendra donc si l'on est mis en demeure de choisir sans pouvoir faire de calculs ou de preuves supplémentaires.

En fait en allant encore plus loin on trouve les candidats :

$$\begin{aligned} &9817477042500000000\sqrt{2} / 1767766952966368811 \\ &39269908170000000000 e / 13591409142295226177 \end{aligned}$$

qui ne semblent pas vraiment plus simples que $5\pi/2$!

Remarquons que concernant l'exemple de départ les trois méthodes essayées aboutissent au même résultat (ce qui semble le rendre encore plus probable). Un calcul direct de l'intégrale à l'origine du problème est d'ailleurs possible et confirme que l'identification $5\pi/2$ est bonne.

Considérons un autre exemple pour illustrer l'idée des fractions continues. Prenons $M = 4,222012200165$

Pour M : [4, 4, 1, 1, 58, 4, 2, 2, 37, 3, 1]

Pour $M / \sqrt{2}$: [2, 1, 67, 1, 1, 3, 1, 14, 1, 26, 5]

Pour M / π : [1, 2, 1, 9, 1, 5, 3, 1, 3, 4, 1]

Pour M / e : [1, 1, 1, 4, 4, 1 + 1/829123] \sim [1, 1, 1, 4, 4, 1] = 73/47

Ce qui cette fois suggère fortement que $M = 73e/47$ (c'est effectivement l'expression utilisée pour définir M)

La méthode des fractions continues va droit au but et est beaucoup plus puissante que les méthodes envisagées au début car les nombres quadratiques ont des développements périodiques et que certains nombres ont des développements en fractions continues simples qu'on peut identifier.

L'inverseur de Simon Plouffe

Aujourd'hui il existe une méthode supplémentaire, bien plus puissante encore et plus commode que celles décrites au-dessus.

Cette méthode est *l'inverseur de Simon Plouffe* qui est à la fois un immense dictionnaire de constantes mathématiques et une machine à rechercher des expressions simples pour les constantes numériques qu'on lui soumet.

Alors que d'habitude on donne une expression à une machine pour qu'elle la calcule, l'inverseur lui retrouve l'expression à partir du résultat, d'où son nom.

Lorsque vous avez un nombre dont vous connaissez quelques chiffres vous pouvez le soumettre à l'inverseur de Plouffe en ouvrant la page Internet de son site à l'adresse : <http://www.lacim.uqam.ca/pi/>

Vous pouvez aussi lui soumettre une question en envoyant un courrier électronique à : number@math.uqam.ca contenant une demande du genre "lookup 1.4142". L'inverseur après quelques secondes de calcul vous renverra sa réponse par courrier électronique.

Quand on lui propose une constante M , l'inverseur de Plouffe l'examine en mettant en œuvre progressivement des méthodes de recherche de plus en plus complexes et puissantes.

Dans un premier temps il se contente de comparer votre M à une liste de constantes mathématiques qui sont mémorisées dans une grande table. Ensuite il utilise une série de méthodes (dont celles des fractions continues) pour rechercher des combinaisons de ces constantes ou des expressions remarquables vérifiées par le nombre étudié.

Le tableau de Mendeleïev des constantes mathématiques

La grande table de constantes, noyau de l'inverseur de Simon Plouffe, peut être vue comme un tableau de Mendeleïev des constantes mathématiques. Elle tente de réunir tous les nombres réels simples rencontrés en mathématiques quel qu'en soit le domaine. La table ne contient pas les constantes physiques qui souvent dépendent de choix arbitraires dans les unités de mesure (cela n'empêche pas que de nombreux physiciens utilisent l'inverseur pour mener leurs travaux théoriques).

Les nombres de la table sont stockés avec la plus grande précision possible (toutes ne sont pas connues avec le même nombre de décimales, certaines sont d'ailleurs très difficiles à calculer).

On trouvera bien sûr π , e , $\sqrt{2}$ mais aussi : $\log(3)$, $\exp(\pi)$, le nombre d'or, le nombre de Champernowne 0,123456789101112..., la constante d'Artin (qui indique la proportion de nombres premiers longs), la constante de Feigenbaum liée à la théorie du chaos, la somme des $1/n^n$, et mille autres choses. Non, pas mille, bien plus : aujourd'hui la table contient 75 millions de constantes.

Cela semble beaucoup, pourtant cela résulte d'un choix limitatif : il serait trop facile de mettre $\log(2)$, $\log(3)$, $\log(4)$ jusqu'à $\log(1000000000)$. L'intérêt de la table provient de ce tout ce qui y est placé est assez simple. On n'y met pas π^{435256} ou $(\log(463052) * \sqrt{2543})^{12}$.

Une encyclopédie numérique de milliers de livres

Les calculs des constantes de la table sont vérifiés et complétés en permanence. Des centres de recherche au Canada, aux Etats-Unis ou en France prêtent leurs machines pour ces calculs. Simon Plouffe évalue que plus de deux ans de temps de calculs d'un processeur rapide sont ainsi matérialisés dans sa table. Le volume de la table est de plusieurs milliards de chiffres, en augmentation constante. Sachant que dans un livre moyen on met à peu près un million de chiffres on peut en déduire que si on l'imprimait l'encyclopédie de Simon Plouffe comporterait plusieurs milliers de tomes. Seule l'informatique permet la consultation et la mise à jour de telles bases de données !

Simon Plouffe envisage que dans l'avenir sa table pourrait contenir jusqu'à un milliard de constantes de base ! (ce qui ferait alors plusieurs centaines de milliards de chiffres).

Les constantes de la table sont classées par ordre numérique sur les chiffres significatifs : 100... au début, 999... à la fin. Plus précisément la table est organisée en 9000 fichiers de base selon les quatre premiers chiffres des constantes : fichier 1000, fichier 1001, jusqu'au fichier 9999 (Pi est dans le fichier 3141).

La recherche dans la table a été soigneusement optimisée par la méthode de recherche binaire : au lieu de parcourir du début à la fin les données on repère si la constante est dans la première moitié ou la seconde, puis dans cette moitié on repère si la constante recherchée est dans la première moitié ou la seconde, etc.

La durée de recherche est de moins d'un dixième de seconde ce qui permet à l'inverseur de répondre facilement aux 500 requêtes faites par jour et provenant du monde entier.

[Il faut noter que les données ne sont pas compressées car cela augmenterait le temps de recherche. De plus, avec ce type de données peu de gain peuvent être obtenus par les méthodes générales de compression. Cependant pour chaque constante il existe une forme très compressée qui ferait gagner beaucoup de place : sa définition. La grande majorité des constantes retenues dans la table s'expriment en moins de 60 caractères du langage de programmation mathématique Maple (qui sert effectivement à calculer la

plupart des données de la table). Il est clair cependant que stocker les constantes sous la forme de leur définition en Maple empêcherait des recherches rapides dans la table qu'il faudrait recalculer à chaque utilisation.
]

L'idée de faire ainsi un dictionnaire des constantes mathématiques n'est pas nouvelle. La première réalisation un peu conséquente est une table élaborée en 1971 par K. Potter et N. P. Robinson qui comportait 60 pages dactylographiées. D'autres dictionnaires de nombres sont indiqués dans la bibliographie.

Simon Plouffe lui-même de son côté dès 1986 a commencé sa collection de constantes qu'il recopiait à la main dans toutes les sources possibles qu'il trouvait. A cette époque raconte-t-il "j'utilisais un Apple 2, je calculais en Basic et je saisisais plusieurs milliers de chiffres par jour, jusqu'à l'écœurement". Sa collection a atteint 75 000 entrées avec 41 décimales en 1987, puis est passée à 110 000 constantes en 1989, 625 000 en 1993, 5,5 millions en 1995 et 75 millions aujourd'hui (plus d'une constante pour chaque français !).

Des algorithmes d'identification

Si la constante que vous avez indiquée à l'inverseur de Plouffe n'est pas dans sa table, une batterie d'algorithmes complexes se met en marche pour essayer quand même de reconnaître votre nombre. Dans un premier temps la recherche de combinaisons simples des constantes les plus fréquentes est tentée. Cette phase est l'équivalent de l'exploration d'une table virtuelle de plusieurs centaines de milliards de constantes. Puis des méthodes de décomposition en fractions continues, en fractions égyptiennes, en produits infinis etc. sont lancées ainsi que d'autres méthodes qui généralisent les fractions continues comme l'algorithme PSLQ dont l'objectif est de trouver des relations complexes impliquant plusieurs constantes. Cet algorithme a déjà permis plusieurs découvertes mathématiques remarquables dont celle, il y a trois ans, par Simon Plouffe d'une formule nouvelle pour Pi qui a conduit à des méthodes de calcul des chiffres binaires indépendamment les uns des autres, et qui est à l'origine du record de plongée dans Pi par le français Fabrice Bellard en octobre 1997. Ce record nous apprend que le mille milliardième chiffre binaire de Pi est un 1 suivi de 0000111111.

Les suites de coefficients associées à votre constante (par exemple provenant du développement en fraction continue) sont étudiées automatiquement en utilisant le dictionnaire des suites numériques de N. Sloane avec lequel Simon Plouffe collabore (ils ont publié ensemble la seconde édition de ce dictionnaire). Ainsi, si vous proposez à l'inverseur une constante

$M = 1.243288478399715644082496545438514876717573387712\dots$

dont le développement en fraction continue est :

[1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,...]

elle sera reconnue car ce développement sera calculé et recherché dans le dictionnaire des suites qui bien sûr la contient.

Simon Plouffe pense d'ailleurs que le monde des suites d'entiers et celui des constantes réelles sont très liés. En tant qu'amateur insatiable de chiffres il a en projet une table des nombres entiers intéressants.

L'expérimentation mathématique

Les mathématiques expérimentales qui sont à la base de la conception de l'inverseur de Simon Plouffe ne sont pas totalement nouvelles. L'exemple historique le plus remarquable de cette approche est celui de la série

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$$

qui intriguait les mathématiciens au 18^e siècle. Leonard Euler (en compétition sur ce problème avec les Bernoulli) après avoir évalué grossièrement cette somme reconnut que c'était $\pi^2 / 6$, ce qui ensuite le guida pour trouver une démonstration du résultat qu'il finit effectivement par obtenir. Carl Gauss, autre géant des mathématiques, précisait aussi que sa façon d'arriver à la vérité mathématique était l'expérimentation systématique.

Aujourd'hui les moyens informatiques suggèrent de reprendre cette conception empirique des mathématiques. Le développement systématique de cette approche iconoclaste ne fait aucun doute, cela d'autant que les systèmes de calcul formel (comme Mathematica ou Maple qui ne manipulent plus seulement des nombres mais aussi des formules mathématiques) étendent le champ de l'expérimentation mathématique, et que les démonstrateurs automatiques de théorèmes mécanisent parfois une part du raisonnement,

permettant à l'approche expérimentale d'aller encore plus loin que ce que permet le calcul numérique.

Les machines autorisent l'exploration de domaines mathématiques où l'homme seul ne peut s'aventurer (le monde des constantes est l'un de ces domaines). Contrairement à ce que pensent certains philosophes, les mathématiques ne se font pas seulement dans la tête : le monde est mathématique et certains agencements de ses composants peuvent aussi faire des mathématiques et révéler aux humains des parties de la réalité abstraite qu'ils ne verraient pas sans leur aide.

Les cerveaux humains ne sont plus les seuls microscopes mathématiques. Les disques durs qui contiennent la table de constantes de Simon Plouffe sont comparables aux accélérateurs de particules du Cern à Genève si importants pour les physiciens. Les vérités mathématiques commerciales (presque certaines, mais non démontrées) produites par les nouveaux outils d'explorations mathématiques seront sans doute de plus en plus nombreuses.

Sites Internet et bibliographie

*** L'inverseur de Simon Plouffe (il identifie les constantes réelles que vous lui soumettez) :
<http://www.lacim.uqam.ca/pi/>

*** Le serveur de suites de Sloane (il reconnaît les suites numériques dont vous lui donnez le début) :
<http://www.research.att.com/~njas/sequences/eisonline.html>

*** Un site très riche consacré aux constantes mathématiques :
<http://www.mathsoft.com/asolve/constant/constant.html>

J.M. Borwein, P. B. Borwein. *A Dictionary of Real Numbers*; Wadsworth, 1990. (Un dictionnaire de constantes, aujourd'hui largement dépassé par la base de nombres de l'inverseur de Simon Plouffe)

* C. Brezinski. *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. Springer-Verlag, 1991.

Delahaye J.P. *Le fascinant nombre Pi*. Edition Pour La Science/Belin, 1997 (Pour des détails sur la nouvelle formule de calcul de Pi découverte par Simon Plouffe).

* G. H. Hardy, E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, First Edition 1938, Fifth Edition 1979 (pour un exposé mathématique sur les fractions continues)

10/05/98

J.-P. Delahaye

* F. Le Lionnais. *Les nombres remarquables*. Hermann, Paris, 1983. Un des tous premiers dictionnaires de nombres (mélangeant nombres réels et nombres entiers)

N. J. A. Sloane, S. Plouffe. *The Encyclopedia of Integer Sequences*. Academic Press, 1995.

* D. Wells. Le dictionnaire Penguin des nombres curieux. Eyrolles, Paris, 1995. (Un autre dictionnaire de nombres réels et entiers).

Idées pour une figure d'ambiance

- un camion (ou un train) chargé de chiffres qui débordent et qui s'éparpillent.
- un microscope avec un nombre (plutôt qu'une bactérie) sur la plaque d'observation.
- une bibliothèque avec sur la tranche des livres : Pi, e, racine de 2, Phi, etc.
- une image évoquant l'invasion du monde par des chiffres (inondation, raz de marée, tornade, "forêts" de chiffres, montagnes de chiffres, etc.)
- une page de chiffres (prise par exemple à la fin de mon livre sur Pi)
- En vis-à-vis : **tableau de Mendeleïev** : **tableau de Plouffe**

Figure 1. Raisonnements heuristiques

Tous les nombres considérés sont entre 0 et 40.

On dispose d'un nombre M qu'on soupçonne être parmi 400 nombres candidats. On compare M aux 400 nombres, on découvre qu'il s'approche de l'un d'eux, $5\pi/2$, de moins 10^{-9} (un milliardième).

Ne doit-on pas considérer comme assuré que M vaut $5\pi/2$?

Raisonnement 1

Si M était choisi au hasard entre 0 et 40 alors la probabilité pour qu'il se trouve à un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait inférieure à :

$$400 \cdot 2 \cdot 10^{-9} / 40 = 2 \cdot 10^{-8}$$

car la longueur totale de l'intervalle considéré est 40 (les cas possibles) et qu'il y a 400 petits intervalles chacun de longueur $2 \cdot 10^{-9}$ correspondant aux cas favorables (les nombres situés à moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés) ce qui au total constitue un ensemble d'intervalles d'une longueur cumulée de $400 \cdot 2 \cdot 10^{-9}$.

Si M était choisi au hasard, la probabilité de trouver M à moins d'un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait donc inférieure à $2 \cdot 10^{-8}$. C'est vraiment très peu, donc ce n'est donc pas par hasard que cela s'est produit c'est parce que M vaut $5\pi/2$.

Figure 1. Raisonnements heuristiques

Raisonnement 2 (utilisant le formule de Bayes)

Supposons que nous ayons quelques raisons de considérer que M est l'un des 400 nombres testés (événement noté A) et que plus précisément a priori nous évaluons la probabilité de A à 1/10. La probabilité, a priori, que M ne soit pas parmi les 400 nombres (événement B) est donc de 9/10.

La formule de Bayes indique comment recalculer cette probabilité après l'expérience conduisant à la découverte que "M est à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres" (événement E).

La nouvelle probabilité pour que M soit l'un des 400 nombres (c'est-à-dire $5\pi/2$) est :

$$P_A' = P_A Q_A / (P_A Q_A + P_B Q_B) \text{ où}$$

P_{AB} = probabilité a priori de A = 1/10

P_B = probabilité a priori de B = 9/10

Q_A = probabilité de E sachant A (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A est vrai) = 1

Q_B = probabilité de E sachant B (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A n'est pas vrai) = $400 \cdot 2 \cdot 10^{-9} / 40 = 2 \cdot 10^{-8}$

P_A' = probabilité de A sachant E (probabilité a fortiori que A soit l'un de 400 nombres, donc $5\pi/2$) = $P_A Q_A / (P_A Q_A + P_B Q_B) =$

$$P_A' = (1/10) / (1/10 + (9/10) \cdot (2 \cdot 10^{-8})) = 0,99999982$$

La probabilité est passée de 10% à 99,999982 %

En partant de $P_A = 1\%$ on arriverait à : $P_A' = 99,99980\%$.

En partant de $P_A = 0,1\%$ on arriverait à : $P_A' = 99,99802\%$

10/05/98

J.-P. Delahaye

Donc même si au départ on a très peu de raisons de croire que M est parmi les 400 nombres essayés, une fois le calcul fait on en est quasiment certain.

Notons bien qu'aucun des deux raisonnements n'est totalement justifié car :

- M n'est pas choisi au hasard (raisonnement 1)
- on ne peut donner aucun sens rigoureux à l'évaluation a priori $P_A = 1/10$ (raisonnement 2)

Avec les raisonnements heuristiques on aboutit à des quasi-certitudes mais pas à des preuves mathématiques.

Figure 2. Les fractions continues (a)

Tout nombre x peut s'écrire sous la forme d'une fraction à une multitude d'étages, appelée fraction continue :

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{\dots}{\dots + \dots}}}}$$

Voici comment obtenir à la main la fraction continue du rationnel $233/177$.

On fait une succession de divisions en reprenant pour dividende de la division n le diviseur de la division $n-1$, et pour diviseur de la division n le reste de la division $n-1$, ce qui conduit à la disposition suivante :

$$\begin{array}{r}
 233 \quad | \quad 177 \\
 \hline
 177 \quad | \quad 56 \\
 \hline
 56 \quad | \quad 9 \\
 \hline
 9 \quad | \quad 2 \\
 \hline
 2 \quad | \quad 1 \\
 \hline
 0 \quad | \quad 2
 \end{array}$$

La première division s'interprète $233/177 = 1 + 56/177 = 1 + 1/(177/56)$

La seconde donne :

$$233/177 = 1 + 1/(177/56) = 1 + 1/(3 + 9/56) = 1 + 1/(3 + 1/(56/9))$$

Etc. Au total la fraction continue est : $[1, 3, 6, 4, 2]$:

J.-P. Delahaye

$$223/177 = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$$

Figure 2. Les fractions continues (b)

Un nombre est rationnel si et seulement si sa fraction continue est finie.

Démonstration :

- Si la fraction continue est finie, le nombre est rationnel (on réduit la fraction continue de proche en proche jusqu'à l'avoir sous la forme p/q)
- Quand on applique la méthode indiquée au-dessus, le diviseur de l'étape n est le reste de l'étape n-1, donc le diviseur diminue strictement à chaque étape, et il n'y a donc qu'un nombre fini d'étapes.

Figure 2. Les fractions continues (c)

Si un nombre a un développement en fraction continue périodique à partir d'un certain point alors il s'écrit comme sous la forme $\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{r}{s}}$ avec p, q, r, et s des nombres entiers.

Exemple. Prenons le nombre $x = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$

Considérons le nombre dont le développement est :

$$y = [4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$$

Le nombre y vérifie :

$$y = 4 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/y)))$$

$$y = 4 + 1/(1 + 1/(1 + y/(y + 1)))$$

$$y = 4 + 1/(1 + (1+y)/(2y + 1))$$

$$y = 4 + (2y+1)/(3y+2)$$

$$y = (14y+9)/(3y+2)$$

$$3y^2 + 2y = 14y + 9$$

$$3y^2 - 12y + 9 = 0$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$\text{delta}' = 4 + 3 = 7$$

$$y_1 = 2 + \sqrt{7}$$

$$y_2 = 2 - \sqrt{7} \text{ (à éliminer car } y > 4)$$

$$\text{d'où } x = y - 2 = \sqrt{7}$$

Pour tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique on peut faire un raisonnement analogue (à chaque fois après réduction de la fraction on aboutit à une équation du second degré). Donc tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique est un nombre quadratique (de la forme $\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{r}{s}}$).

Il n'est pas aussi simple de démontrer la réciproque : si un nombre est de la forme $\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{r}{s}}$ avec p q r et s entiers, alors son développement est

10/05/98

J.-P. Delahaye

périodique à partir d'un certain point. C'est pourtant ce que Lagrange a établi.

Figure 3. Les fractions continues des racines carrées

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots}}}} = [1, 4, 4, 4, 4, 4, \dots]$$

$$\sqrt{6} = [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots]$$

$$\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, \dots]$$

$$\sqrt{8} = [2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots]$$

$$\sqrt{9} = [3] \quad \sqrt{10} = [3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \dots]$$

$$\sqrt{11} = [3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, \dots]$$

$$\sqrt{12} = [3, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, \dots]$$

$$\sqrt{13} = [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \dots]$$

$$\sqrt{14} = [3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, \dots]$$

$$\sqrt{15} = [3, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, \dots]$$

$$\sqrt{16} = [4] \quad \sqrt{17} = [4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, \dots]$$

$$\sqrt{18} = [4, 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8, \dots]$$

$$\sqrt{19} = [4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, \dots]$$

$$\sqrt{20} = [4, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, \dots]$$

Figure 4. Quelques constantes mathématiques parmi les 75 millions de la table de Simon Plouffe.

Le nombre d'Archimède

: rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre

$$= 3,14159265358979323846264338328\dots$$

Connu avec une précision de 51 539 600 000 de décimales.

Durée du calcul : 29 heures 3 minutes + 37 heures 8 minutes (pour la vérification).

Machine : Hitachi SR2201 avec 1024 processeurs.

Auteur du calcul : Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi de l'université de Tokyo

Calculs menés du 6 au 8 juin 1997 et du 4 au 6 juillet 1997.

La racine carrée de deux

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

$$= 1,41421356237309504880168872421$$

Connu avec une précision de 137 438 953 444 décimales.

Durée du calcul : 7.5 heures.

Machine : Hitachi SR2201 avec 1024 processeurs.

Auteur du calcul : Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi de l'université de Tokyo.

3 août 1997.

La constante des logarithmes népériens

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots =$$

2,71828182845904523536028747135...

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}}} = [2,1,2,1,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1\dots]$$

Connu avec une précision de 50 000 817 décimales

Durée du calcul 714 heures.

Machine : HP 9000/778 160 Mhz

Auteur du calcul : Patrick Demichel

Date du calcul : 30 septembre, 1997.

(un calcul d'un milliard de décimales aurait été mené par David et Gregory Chudnovsky)

Logarithme de deux

$$\log(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots$$

= 0,693147180559945309417232121458

Connu avec une précision de 58 486 400 décimales

Durée du calcul : 53 heures

Machine : SGI R10000.

Auteur du calcul : Xavier Gourdon

10/05/98

J.-P. Delahaye

Décembre 1997.

Le nombre d'or

$$= (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803398874989484820458683436\dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Connu avec une précision de 10 000 000 décimales

Durée du calcul : 29 minutes.

Machine : SGI R10000; 194 Mhz.

Auteur du calcul : Simon Plouffe

2 décembre 1996.

La constante d'Euler-Mascheroni

$$: \lim_n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right) = 0,577215664901\dots$$

Connu avec une précision de 7 286 255 décimales.

Durée du calcul : 47 heures 36 minutes.

10/05/98

J.-P. Delahaye

Machine: SGI R10000.
Auteur du calcul : Xavier Gourdon
Décembre 1997.

La constante d'Apéry

$Z\grave{e}ta(3) = 1 + 1/23 + 1/33 + 1/43 + 1/53 + \dots$

$= 1.20205690315959428539973816151\dots$

Connu avec une précision de 32 000 279 décimales.
Durée du calcul : 35 heures, 21 minutes.
Machine: 9x MIPS R10000 180 Mhz.
Auteur du calcul : Sebastian Wedeniwski
17 mars 1998.

Figure 5. L'inverseur de Simon Plouffe

Quand on pose la question : “quelle est la constante : 7,853981634 ?” à l'inverseur de Plouffe on obtient un extrait de la table. La réponse correcte ($5\text{Pi}/2$) est une constante tellement basique qu'elle y est représentée plusieurs fois sous des codages différents.

7853977541646791 = (p212) S10(1,2)(8,-8,8,2,-9)
 7853977611656700 = (a261) $-3-2*x+3*x^2+3*x^3-2*x^4-6*x^5$
 7853978825673085 = (q399) $5/63662$
 7853979266757639 = (v131) $\text{sum}(1/(8*n^2-8*n+52),n=1..inf)$
 7853979538716315 = (m001) $(\exp(-1/2*Pi)-\log(\gamma)*\ln(1+sr(2)))/\ln(1+sr(2))$
 7853980101855253 = (a311) $\cos(Pi*1/58)*\sin(Pi*17/59)$
 7853980314963090 = (a215) Discriminant of a Real Cubic Field
 7853980378630278 = (a334) $21^{1/2}*(12^{1/4}-19)$
 7853980996271272 = (a215) Discriminant of a Real Cubic Field
 7853981032645112 = (v131) $\text{sum}(1/(5/2*n^2+145/2*n-44),n=1..inf)$
 7853981126778084 = (m001) $(1/2-\text{Backhouse}*GAM(5/6))/\text{Backhouse}$
 7853981633974126 = (v131) $\text{sum}(1/(4*n^2-4*n+101),n=1..inf)$
7853981633974483 = (a007) $\text{Pi}/4$ =
 $5\text{Pi}/4$
7853981633974483 = (m001) $\text{Pi}*\cos(Pi/12)*\sin(Pi/12)$
 = **$5\text{Pi}/4$**
7853981633974483 = (m405) $1/4*sr(Pi)^2$ =
 $5\text{Pi}/4$
7853981633974483 = (p199) S(1,1)[1,1,1,0,-1,1,-1,0]
 = **$5\text{Pi}/4$**
7853981633974483 = (s207) A003881 Concatenated sequence from EIS =
 $5\text{Pi}/4$
 7853981689970672 = (v003) $\text{sum}(1/(2^n+(29/2*n^2+31/2*n-12)),n=1..inf)$
 7853981829182755 = (f259) $F(7/12,9/10;1/10,2/9,4/7;1)$
 7853982300884955 = (q399) $355/452$
 7853982572371080 = (m001) $\text{BesK}(0,1)+\cos(1)^{GAM(13/24)}$
 7853982658543988 = (f259) $F(7/12,5/8;1/7,4/5,2/3;1)$
 7853982819699420 = (p212) S10(1,5)(6,5,0,-3,-2)
 7853983015535401 = (v003) $\text{sum}(1/(3^n+(17/2*n^2-25/2*n+28)),n=1..inf)$
 7853983588391700 = (m001) $\text{BesJ}(0,1)/\text{BesK}(0,1)*\exp(-Pi)$
 7853983588391700 = (m001) $\text{BesJ}(0,1)/\exp(Pi)/\text{BesK}(0,1)$
 7853983685097973 = (m001) $\exp(1/2)*\text{Zeta}(1,2)^{GAM(1/12)}$
 7853983963809479 = (p210) $\text{sqrt}(3)*T_2(0,1,-1,-1,1,1,-1,0,0,-1,-1)$
 7853984493158376 = (v015) $\text{sum}((19/6*n^3-19*n^2+353/6*n-28)*n!/n^n,n=1..inf)$
 7853984748948144 = (g404) $-\text{Psi}(2/15)+\text{Psi}(9/14)-\text{Psi}(13/20)$
 7853984752358357 = (m001) $(sr(2)+GAM(11/12))^{BesI(0,2)}$
 7853984917319985 = (v131) $\text{sum}(1/(113/2*n^2-173/2*n+47),n=1..inf)$
 7853985100688294 = (m001) $(\text{Pi}*\cos(Pi/12)-W(1))/\text{Pi}$
 7853985141603086 = (a263) $16+16*x+7*x^2+16*x^3$

10/05/98

J.-P. Delahaye

Figure 6. La loi de Benford et la table des constantes de Simon Plouffe

La loi de Benford indique que dans une table numérique de valeurs naturelles (par exemple celle des longueurs des fleuves) il y aura une plus grande quantité de nombres commençant par 1 que de nombres commençant par 2, et qu'il y aura une plus grande quantité de données commençant par 2 que par 3, etc. La proportion de données commençant par 1 doit être à peu près de 30%.

Dans la table des constantes de Simon Plouffe (qu'on peut assimiler à une table de valeurs naturelles) on constate cette décroissance de la quantité des constantes en fonction de leur premier chiffre significatif.

La courbe suivante est globalement conforme à celle suggérée par la loi de Benford, avec certaines irrégularités que Simon Plouffe analyse en recherchant à en comprendre le détail.

Voir figure jointe A

dessin à

<http://www.lacim.uqam.ca/plouffe/statistics.html>

Figure 7. Trouvailles des mathématiques expérimentales

Le centre de gravité de l'ensemble de Mandelbrot.

En mars 1998, Robert Munafo à Malden dans le Massachusetts a mené un calcul approché de la surface et du centre de gravité de l'ensemble de Mandelbrot. L'inverseur de Simon Plouffe a alors été utilisé pour identifier ces deux constantes. Concernant la surface rien d'intéressant n'a été découvert. En revanche, pour le centre de gravité l'inverseur a proposé la valeur $(\log(3) - 1/3) \text{Feig1}$ où Feig1 est la première constante de Feigenbaum (qui vaut 4,669201609102..). Les constantes des Feigenbaum sont des constantes qu'on rencontre en théorie du chaos et dans l'étude des fractal. Il apparaît donc très vraisemblable que la formule trouvée pour le centre de gravité est juste. Pour en être plus sûr il faudrait disposer de quelques chiffres supplémentaires dans l'évaluation du centre de gravité. Malheureusement ce centre de gravité est très coûteux à évaluer et on considère qu'il faudra une dizaine d'années pour disposer de machines donnant un chiffre significatif de plus.

La découverte de cette intéressante conjecture est un exemple supplémentaire de l'intérêt de l'approche expérimentale des mathématiques en général et de l'inverseur de Simon Plouffe en particulier.

Voir figure jointe B