INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Entre Machin et Plouffe...

Autour de l'arc-tangente...

1. Autour de l'arc-tangente

On part de $\xi + \mathrm{i} = \sqrt{\xi^2+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(1/\xi)}$ pour tout $\xi > 0$.
Soit $p, q, r \in \mathbb{Z}$ et $x, y, z > 0$. On a

$$(x+\mathrm{i})^p(y+\mathrm{i})^q(z+\mathrm{i})^r = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\arctan(1/x)+q\arctan(1/y)+r\arctan(1/z))}$$

d'où l'équivalence

$$(x+\mathrm{i})^p(y+\mathrm{i})^q(z+\mathrm{i})^r \in \mathbb{R}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$p\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+q\arctan\left(\frac{1}{y}\right)+r\arctan\left(\frac{1}{z}\right)\equiv 0 \quad [\mathrm{mod}\ \pi].$$

Cas particulier : pour $z = 1$ et $r = -1$,

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\ (x+\mathrm{i})^p(y+\mathrm{i})^q = \lambda(1+\mathrm{i})$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$p\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+q\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\equiv\frac{\pi}{4} \quad [\mathrm{mod}\ \pi].$$

1. Autour de l'arc-tangente

Exemples

1. $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=5(1+\mathrm{i}) \Longrightarrow \boxed{\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}}$ (Euler) Leonhard 1707–1783

2. $\frac{(2+\mathrm{i})^2}{7+\mathrm{i}}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}) \Longrightarrow \boxed{\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}}$ (Hermann) Jakob 1678–1733

3. $(3+\mathrm{i})^2(7+\mathrm{i})=50(1+\mathrm{i}) \Longrightarrow \boxed{\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}}$ (Hutton) Charles 1737–1823

4. $\frac{(5+\mathrm{i})^4}{239+\mathrm{i}}=2(1+\mathrm{i}) \Longrightarrow \boxed{???}$

1. Un résultat historique

Théorème (Formule de John Machin, 1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

John Machin, 1680–1751

1. Un résultat historique

Application : à l'aide de la formule de Madhava-Gregory-Leibniz

$$\forall x \in [-1,1],\ \arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1}$$

on peut calculer les décimales de π.

Corollaire : calcul des décimales de π

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}}\right)$$

La somme $4\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}}\right)$ *fournit 16 décimales*

alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{1000} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ *n'en fournit que deux... !*

Si vous avez aimé
la somme
de deux arctangentes,

vous allez adorer
la somme de...

1. Bonus tracks

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239}$$

(Gauss)
Carl Friedrich
1777–1855

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443}$$

$$\frac{\pi}{4} = 183 \arctan \frac{1}{239} + 32 \arctan \frac{1}{1023} - 68 \arctan \frac{1}{5832} + 12 \arctan \frac{1}{110443} - 12 \arctan \frac{1}{4841182} - 100 \arctan \frac{1}{6826318}$$

$$\frac{\pi}{4} = 183 \arctan \frac{1}{239} + 32 \arctan \frac{1}{1023} - 68 \arctan \frac{1}{5832} + 12 \arctan \frac{1}{113021} - 100 \arctan \frac{1}{6826318} - 12 \arctan \frac{1}{33366019650} + 12 \arctan \frac{1}{43599522992503626068}$$

Encore π*...*

(et des sommes et des intégrales)

2. Une petite intégrale

On part de $\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ pour $\alpha > 0$.

Cela donne pour $x = 1/\sqrt{2}$ et $\alpha = 8k + a$ $(a, k \in \mathbb{N})$:

$$\frac{1}{(8k+a)16^k} = 2^{a/2}\int_0^{1/\sqrt{2}} x^{8k+a-1}\,\mathrm{d}x$$

puis on somme par rapport à k de 0 à n :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(8k+a)16^k} &= 2^{a/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\sum_{k=0}^{n} x^{8k+a-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2^{a/2}\int_0^{1/\sqrt{2}} x^{a-1}\,\frac{1-x^{8n+8}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x \\
&= 2^{a/2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{a-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x - \varepsilon_{a,n}
\end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_{a,n} = 2^{a/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{8n+a+7}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \times \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{8n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{16^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Une grosse somme...

On calcule ensuite la somme (en choisissant $a = 1, 4, 5, 6$)

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \frac{1}{16^k}$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x - \sum_{a\in\{1,4,5,6\}} \varepsilon_{a,n}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x}$$

2. Une fonction rationnelle

1. **Simplification de la fraction** $\dfrac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1 - x^8}$

Factorisation du numérateur :

$$\begin{aligned} 4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5 &= 4\sqrt{2}(1 - x^4) - 8x^3(1 + x^2) \\ &= 4(1 + x^2)(\sqrt{2} - \sqrt{2}x^2 - 2x^3) \\ &= -4(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(2x - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Factorisation du dénominateur :

$$\begin{aligned} 1 - x^8 &= (1 - x^4)(1 + x^4) \\ &= -(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

Forme irréductible :

$$\frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1 - x^8} = \frac{8x - 4\sqrt{2}}{(x - 1)(x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}$$

2. Une fonction rationnelle

Décomposition de la fraction $\dfrac{8x-4\sqrt{2}}{(x-1)(x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$

On a

$$\frac{8x-4\sqrt{2}}{(x-1)(x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ qui se calculent selon :

$$a = \lim_{x\to 1} \frac{8x-4\sqrt{2}}{(x-1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \boxed{2}$$

$$b = \lim_{x\to -1} \frac{8x-4\sqrt{2}}{(x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \boxed{2}$$

$$c\,e^{i\pi/4} + d = \lim_{x\to e^{i\pi/4}} \frac{8x-4\sqrt{2}}{x^2-1} = \lim_{x\to e^{i\pi/4}} \frac{4\sqrt{2}\,i}{-1+i} = 2\sqrt{2}(1-i)$$

d'où l'on extrait $\boxed{c=-4 \quad \text{et} \quad d=4\sqrt{2}.}$

3. **Un calcul d'intégrale**

On a

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1 - x^8}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$-4\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[2\ln|x-1| + 2\ln|x+1|\right]_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$-2\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x + 2\sqrt{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[2\ln|x^2-1| - 2\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + 4\arctan(\sqrt{2}x-1)\Big]_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$= \pi$$

2. Un autre résultat historique

Théorème (Formule de Simon Plouffe, 1995 🇨🇦)

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \frac{1}{16^k}$$

La formule BBP (Bailey-Borwein-Plouffe) permet de calculer le n^{e} chiffre après la virgule de π en base 2 (ou 16) sans avoir à en calculer les précédents. Elle a été obtenue en 1995 par Simon Plouffe en collaboration avec David H. Bailey et Peter Borwein.

2. Bonus tracks

Exercice

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} \right)$$

$$\pi\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{8^k} \left(\frac{4}{6k+1} + \frac{1}{6k+2} + \frac{1}{6k+3} \right)$$

Si vous avez aimé π
et les $1/4$***, les*** 8^e***, les*** 16^e***,***

vous allez adorer...

2. Bonus tracks

$$\pi^2 = \frac{9}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{64^k}\left(\frac{16}{(6k+1)^2}-\frac{24}{(6k+2)^2}-\frac{8}{(6k+3)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{6}{(6k+4)^2}-\frac{1}{(6k+5)^2}\right)$$

$$\pi^3 = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1024^k}\left(\frac{32}{(4k+1)^3}+\frac{8}{(4k+2)^3}+\frac{1}{(4k+3)^3}\right)$$
$$+\frac{5}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{64^k}\left(\frac{32}{(12k+1)^3}-\frac{192}{(12k+2)^3}+\frac{88}{(12k+3)^3}\right.$$
$$-\frac{8}{(12k+5)^3}+\frac{84}{(12k+6)^3}-\frac{4}{(12k+7)^3}$$
$$\left.+\frac{11}{(12k+9)^3}-\frac{12}{(12k+10)^3}+\frac{1}{(12k+11)^3}\right)$$

MERCI !

MERCI DE VOTRE
INDICIBLE MANSUÉTUDE !