

Un test à grande échelle avec les décimales de π et autres constantes

Simon Plouffe
24 juin 2022

Résumé

Une série de tests à grande échelle ont été effectués sur les 1000 premiers milliards de chiffres du nombre π . Tout d'abord un test visuel direct ainsi qu'un test en utilisant des milliers de suites du catalogue OEIS. Le but de ces tests est de détecter des motifs éventuels. D'autres tests ont été faits sur une dizaine de constantes mathématiques à 1 milliard de décimales.

Abstract

A series of large-scale tests were performed on the first 1000 billion digits of the number π . First a direct visual test as well as a test using thousands of sequences from the OEIS catalog. The purpose of these tests is to detect possible patterns. Other tests were made on ten mathematical constants to 1 billion decimal places.

Le test visuel

Les 1000 milliards de chiffres ont été séparés en blocs de 100 millions de décimales sans autre séparateur. Chaque bloc de chiffre a ensuite été encodé en une image en tons de gris en utilisant l'utilitaire ImageMagick. Chaque image est donc de 100 millions de pixels et fait 10000 X 10000.

La commande est

```
convert -size 10000x10000 -brightness-contrast 55x92 -depth 8  
gray: fichier fichier.png;
```

Le résultat de cet encodage est difficilement visible à moins d'utiliser un programme qui permette de voir le détail du dessin et d'en augmenter le contraste. On peut l'améliorer passablement en forçant la mise en couleurs. Le script *pseudocolor* [1] est parfait pour cette conversion.

Une fois converties les décimales sont maintenant toutes visibles à l'œil nu. J'ai construit une page web énorme contenant 10000 images permettant de voir individuellement chaque image.

On peut en voir quelques-unes ici [2].

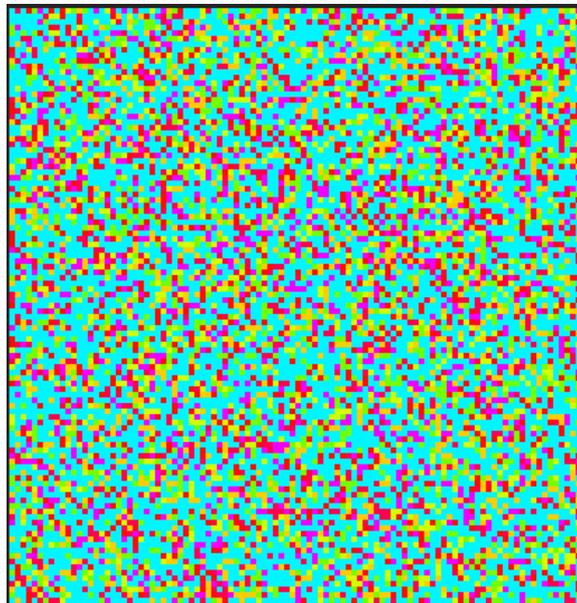
De toute évidence l'image globale de ces 1000 milliards de chiffres ne ressemble à rien. À peu de chose près elles ont toutes la même taille, soit 42 méga-octets. Ce qui correspond aussi à la compression obtenue sur 100 millions de chiffres. Voici une capture d'une partie de l'une des images, la 4^{ème} qui représente les décimales de 300 à 400 millions.



Elles ont toutes le même 'grain', elles sont indiscernables et on ne perçoit aucun motif. On voit toutes les décimales si on se donne la peine de parcourir les fichiers mais cet examen n'avance à rien. Donc, à première vue, il n'y a aucun motif apparent.

On peut pousser plus loin l'analyse en utilisant une astuce pour encoder ou décoder les décimales en utilisant les nombreuses suites du catalogue OEIS. Il s'agit de voir si en enlevant certains chiffres ou groupes de chiffres un motif apparaîtrait. C'est un filtrage négatif. Par exemple la suite : 0, 1, 3, 6, 10, 15, ... des nombres triangulaires A000217 du catalogue OEIS est un bon départ. On filtre négativement les décimales terme après terme. On enlève d'abord tous les '0' du développement, suivi des '1', suivis des 3, ... ce qui donne la chaîne : a4a592a5a58979a2a84a2a4aa8a2795aa... ça revient à encoder en base 11. C'est une représentation aplatie de π en base 11, ce qui est curieux parce qu'on mentionne π en base 11 dans un livre célèbre de Carl Sagan (Contact) [4] où des chercheurs explorant le nombre π jusqu'à 10^{20} décimales découvrent avec stupeur qu'un énorme cercle s'y dessine.

Le résultat donne : près du coin supérieur gauche. Pour faire le test, une valeur de π à 16777216 décimales a été choisie ce qui permet de créer des images de 4096 X 4096.



L'examen de plus de 10000 dessins générés automatiquement avec 10000 suites du catalogue OEIS n'est pas plus convaincant qu'avec les décimales en brut. Malgré la grande variété des résultats possibles, même avec des milliers d'images : on ne perçoit rien du tout. Trivialement, la suite des nombres entiers 0,1,2,3,4,... donne une image vide évidemment. Justement, cette richesse du catalogue utilisé comme filtre négatif n'a malheureusement rien donné de visible. Une partie des images sont visibles ici [3]. La différence avec le test précédent est qu'on a une palette de couleurs mais encore avec un grain qui semble complètement dû au hasard. On obtient quelques images 'blanches', ici la couleur choisie est bleu pâle qui correspond au caractère vide. Quand l'image est peu filtrée on obtient assez exactement le même genre d'image que le test précédent. Par exemple la suite A000002 qui ne contient que des '1' et des '2' filtre peu les chiffres de π .

Nombre	Etendue (pixels)	Nombre d'images	Résultat
$\Phi \backslash \text{OEIS}$	4096×4096	4568	Rien de visible
$\sqrt{2} \backslash \text{OEIS}$	4096×4096	2420	Rien de visible
$\pi \backslash \text{OEIS}$	1024×1024	353437	Rien de visible
$\pi \backslash \text{OEIS}$	4096×4096	8615	Rien de visible
$\pi \backslash \text{OEIS}$	10000×10000	1029	Rien de visible
π	10000×10000	10000	Rien de visible
π	10000×10000 De 22400 à 22590 milliards	591	Rien de visible

Toutes les images ont été examinées sans résultat. Le test avec π a été fait avec toutes les suites du catalogue OEIS, les autres tests portent sur un échantillonnage de suites.

Le test numérique

Pour ce test, on considère comme marginal la possibilité qu'un motif puisse apparaître à cheval entre 2 fichiers de 100 millions de caractère, pour des raisons pratiques il est plus facile de scanner des blocs de cette taille plutôt que d'avoir à scanner un fichier de 1000 milliards de chiffres d'un coup.

Les 1000 milliards premières décimales de π ont été utilisées et 10 constantes à 1 milliard de décimales : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, φ , e , $\ln(2)$, $\ln(10)$, γ , *Cte du Lemniscate*, $\zeta(3)$ et *Catalan*. Ensuite les filtres constitués de rationnels, d'abord F_{999} : les fractions de Farey entre 0 et 1 dont le dénominateur est compris entre 2 et 999 : 303791 valeurs. Le 2^{ème} filtre de rationnels est fait d'un large spectre de rationnels qui viennent de ma table de l'inverseur : 10,647 millions de valeurs. L'autre filtre important est constitué de toutes les entrées de la petite version de l'inverseur, ce sont des nombres réels venant de tous les domaines connus, 10,921 milliards d'entrée. Les 3 ensembles sont avec une précision de 20 chiffres décimaux (tronqués). Le choix de cette largeur de filtre est pour éviter les petites collisions dues au hasard.

Un test a été fait avec des filtres de largeur 14, ça donne beaucoup de collisions qui sont dues au hasard. Pour étoffer cette hypothèse j'ai constitué une table de 1000 milliards de chiffres générés avec le Mersenne Twister et comparé les collisions avec π . On trouve la même quantité de collisions qui sont dues à ce qu'on peut appeler l'effet Feynman. L'effet Feynman est le point dans les décimales de π au rang 762 : il y a 999999 et ce phénomène

se répète bien sûr plus loin. Ces collisions ou points de Feynman sont normaux dans le contexte. Le même phénomène se produit avec les chiffres au hasard. C'est pour éviter les collisions fortuites que le choix de 20 décimales de largeur a été fait.

Le premier test a été fait sur les 1000 milliards de chiffres de π et aucune collision n'est apparue. Le 2^{ème} test a été fait avec la grosse table de rationnels (10,647 millions d'entrées) sur 541 milliards de chiffres : aucune collision non plus.

Une simple commande unix permet de scanner efficacement un énorme fichier de 100 millions de caractères et d'en retirer (s'il y a une collision) les caractères trouvés.

```
fgrep -of fichier_filtre fichier_à_fouiller> fichier_résultat
```

Le 3^{ème} test a été fait avec la table des réels de l'inverseur : 10,921 milliards d'entrée sur les 10 milliards de décimales de π : aucun résultat trouvé. Je m'en suis remis donc à un test sur les 10 constantes avec la grosse table de 10.92 milliards d'entrée :

Cette fois on a 1 collision mais qui est fortuite entre le $\log(2)$ et l'une des racines réelles de ce polynôme.

$$866x^4 + 324x^3 + 616x^2 - 791x - 148$$

La collision avec $\log(2)$ apparaît à la position 335519351. C'est la seule qui a été obtenue.

Des marqueurs bien identifiés ont été insérés sur certains fichiers à la queue ou à la tête pour être certain que le programme passe en revue tous les chiffres d'un bloc de 100 millions de caractère.

Voici un tableau qui résume les tests.

Ensemble	Nombre d'entrées	Ensemble de comparaison	Résultats
F_{999}	303791	1000 milliards de π	0
Grande table de rationnels	10 647 727	541 milliards de π	0
Tables de l'inverseur	10921455809	10 milliards de π	0
Tables de l'inverseur	10921455809	10 constantes à 1 milliard de décimales	1

Conclusion

Le résultat des tests est négatif, aucun motif n'a été trouvé. Ça ne veut pas dire qu'il n'y en a pas mais en prenant un échantillon de nombres très étendu comme les tables de mon inverseur et malgré la quantité (plus de 10.92 milliards) et malgré la richesse des suites du OEIS et 353000 cas testés : aucune collision. Les tests visuels sont décevants, on peut examiner à l'œil nu les 1000 milliards de décimales d'un coup et malgré la capacité du cerveau humain à reconnaître des motifs : aucun des 400000 fichiers examinés n'a montré le moindre signe.

Il y a 2 choix qui s'offrent, soit on déclare qu'il n'y a probablement pas de motif dans la suite des chiffres du nombre π soit on fait une nouvelle expérience à très grande échelle. Le record actuel de calcul est de 10^{14} décimales et pour faire un test il faut passablement plus qu'un simple pc ou deux et quelques disques durs. À mon avis, il n'y a que Google qui puisse être en mesure de faire un test au même niveau. Peut-être qu'avec l'aide de machines intelligentes on pourrait rechercher plus loin mais pour ça il faut un modèle. Ça n'existe pas à l'heure actuelle. Étant donné les moyens dont ils disposent on peut envisager d'aller bien plus loin dans la recherche de motif. Il n'y a pas que le nombre π qui puisse être intéressant puisque dans ce domaine : on ne connaît strictement rien. Il n'y a aucun exemple de constante naturelle en base 2 ou 10 où même dans n'importe quelle base qui exhibe un motif quel qu'il soit.

Bibliographie

[1] Fred Weinhaus, le script pseudocolor

<http://www.fmwconcepts.com/imagemagick/pseudocolor/index.php>

[2] Plouffe Simon, 10000 images of 1000 billion digits of π :

<http://plouffe.fr/1000%20billion%20digits%20of%20Pi/>

All the images are available on request (422 gigabytes).

[3] Plouffe Simon, OEIS sequences vs digits of π :

<http://plouffe.fr/Pi%20-%20OEIS%20sequences,%20first%20999%20sequences/>

[4] Sagan Carl, *Contact*, Simon & Schuster, 1^{er} septembre 1985

[5] Trueb Peter, Digit Statistics of the First 22.4 Trillion Decimal Digits of Pi, ARXiv,

<https://arxiv.org/abs/1612.00489>

[6] Google (alphabet) : Computation of 100 000 billion digits of π .

<https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-100-trillion-digits-of-pi-on-google-cloud>