Une formule pour le n'ième chiffre de π et π^n

Simon Plouffe
29 janvier 2022

Résumé

En utilisant une formule asymptotique connue pour les nombres d'Euler et de Bernoulli il est possible d'obtenir une expression explicite du nième chiffre de π en décimal ou en binaire, elle permet également d'obtenir le nième chiffre de π^n. Le calcul est fait à partir des deux inégalités

$$\left(\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\right)\left(\frac{1}{1-2^{1-2n}}\right) > (-1)^{n+1}B_{2n} > \left(\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\right), n = 1, 2, \ldots$$

et

$$\frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}} > E_{2n} > \frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left(\frac{1}{1+3^{-1-2n}}\right), n = 0, 1, \ldots$$

En isolant π dans les deux cas, on peut en tirer une approximation de ce dernier. L'approximation est à ce point bonne qu'en fait elle permet d'extirper le nième bit de π, de la nième décimale de π et même la nième décimale de π^n, n $\in \mathbb{Z}^*$.

Abstract

By using an asymptotic formula known for the numbers of Euler and Bernoulli it is possible to obtain an explicit expression of the nth digit of π in decimal or in binary, it also makes it possible to obtain the nth digit of π^n. The calculation is made from the two inequalities

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\left(\frac{1}{1-2^{1-2n}}\right) > (-1)^{n+1}B_{2n} > \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}, n = 1, 2, \ldots$$

et

$$\frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}} > E_{2n} > \frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left(\frac{1}{1+3^{-1-2n}}\right), n = 0, 1, \ldots$$

By isolating π in both cases, we can derive an approximation of the latter. The approximation is so good that in fact it allows to extract the nth bit of π, the nth decimal of π and even the nth decimal of de π^n, n $\in \mathbb{Z}^*$.

Les nombres de Bernoulli et π

Les 2 inégalités sont tirées de [3], p. 809. En isolant donc, le nombre π dans la première on obtient :

$$\pi \approx \left(\frac{2n!}{B_n 2^n}\right)^{1/n}$$

Les B_n sont en valeur absolue et n pairs. On vérifie facilement qu'avec n $= 1000$, l'erreur sur π est de l'ordre de $0.293193 \times 10^{-303}$, ce qui est inférieur à 2^{-1000}. Donc, la millième position de cette expression est le 1000ème bit du nombre π. Dès que n $= 10$, la formule est valide : elle permet d'avoir la nième position. À noter qu'étant donné la parité des nombres de Bernoulli on obtient 2 bits à chaque n, celui de rand n et celui de rang $n - 1$. C'est valide à partir de 10 parce que les nombres de Bernoulli sont un peu chaotiques quand n est petit, la croissance rapide de ces derniers se fait sentir à partir de n $= 14$.
La bonne question qui vient ensuite est : est-il possible de calculer la nième position décimale ? La réponse est en fait oui. Voici comment.

Étant donné la relation connue avec la fonction Zeta, il est possible d'étirer la formule en y rajoutant suffisamment de termes pour avoir une erreur inférieure à 10^{-n}. Dans le livre d'Abramowitz et Stegun [3] justement dans le même chapitre on a la formule

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}|B_{2n}|$$

Comme on le sait, $\zeta(2n)$ peut être représentée comme un produit infini du à Euler, en prenant soigneusement les 4 premiers termes on les rajoute donc à notre expression pour avoir :

$$\pi \approx \left(\frac{2n!}{B_n 2^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)}\right)^{1/n}$$

Sachant que le prochain terme serait $\left(1-\frac{1}{11^n}\right)$ cela nous assure que l'erreur commise sera inférieure au 10^{-n}. En effet en vérifiant avec n $= 1000$ (et même 10000) on trouve un erreur de l'ordre de $0.1271934403 \times 10^{-1043}$. On en conclut que pour chaque n dans l'expression il semble possible d'obtenir la nième décimale du nombre π. La difficulté est alors d'arriver à calculer B_{2n} quand n est grand. Le record actuel pour les nombres de Bernoulli est 100 millions. Donc, on peut calculer la 100 000 000ième décimale de π avec ce procédé. À noter que le calcul des nombres de Bernoulli peut se faire de plusieurs manières dont une qui demande de connaître π avec une bonne précision. Jusqu'à 2002, le record de calcul des Bernoulli utilisait justement cette formule et quelques valeurs de la série pour Zeta(n), voir [5] à ce sujet. À l'heure actuelle, le calcul utilise des propriétés des congruences et le théorème du reste chinois. Le calculateur Pari-GP utilise justement cette excellente approximation pour calculer les nombres de Bernoulli, la même méthode est appliquée pour les nombres d'Euler

La formule est suffisamment précise pour obtenir encore plus si on élève à la puissance n. En effet on aura

$$\pi^n \approx \left(\frac{2n!}{B_n 2^n \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)}\right)$$

En vérifiant avec n = 1000 on obtient, les 1000 premiers chiffres valides de π^{1000}, donc la 1000ème position si on veut. Pour obtenir la 1000ème position de x, il suffit de calculer

$$position(n,x) = [10\,\{10^n x\,\}]$$

[ ] et { } étant les parties entières et fractionnaires. Si on calcule π^n, la formule doit être convertie pour traiter le nombre comme une chaine de caractères à partir de la gauche.

Les nombres d'Euler et π

On reprend l'expression du livre de A & S page 809, on isole π et on obtient :

$$\pi \approx \left(\frac{(2n)!\,2^{2n+2}}{E_{2n}}\right)^{1/(2n+1)}$$

Ici les E_{2n} sont les nombres d'Euler positifs obtenus par le développement en série de $1/\cos(x)$. On vérifie sans peine qu'avec n = 1000 on obtient une précision de 957 chiffres décimaux. Mais connaissant l'erreur commise et la première formule on peut en déduire que cette erreur est proportionnelle à 9^{-1000}. Donc, on peut affirmer qu'en base 8 l'expression donne le nième chiffre de π en octal, a fortiori en binaire.

Pour aller plus loin comme avec les nombres de Bernoulli, il suffit de rajouter 1 seul terme pour avoir une erreur inférieure à 10^{-n}. Ce qui nous donne

$$\pi \approx \left(\frac{(2n)!\,2^{2n+2}}{E_{2n}}\left(1-\frac{1}{3^{2n+1}}\right)\right)^{1/(2n+1)}$$

Et si on vérifie avec n >> 1, pour n = 1000 on a ici une erreur sur π de l'ordre de 10^{-1198}, donc la nième décimale de π peut être calculée avec la formule en utilisant la fonction $position(n,x)$.

Pour avoir le nième chiffre en base 10 de π^n en utilisant les nombres d'Euler, on rajoute des termes jusqu'à ce que l'erreur soit plus petite que 10^{-n}. On doit prendre plus de termes ici puisque les puissances de π nous éloignent du point décimal. On a donc au final la formule suivante

$$\pi^{2n+1} \approx \frac{(2n)!\,2^{2n+2}}{E_{2n}}\left(1-\frac{1}{3^{2n+1}}\right)\left(1+\frac{1}{5^{2n+1}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n+1}}\right)\left(1-\frac{1}{9^{2n+1}}\right)$$

Pour $1/\pi$, en base 10 toujours avec Euler, on peut simplement inverser

$$\frac{1}{\pi} = \left(\frac{E_{2n}}{(2n)!\,2^{2n+2}}\left(1-\frac{1}{3^{2n+1}}\right)\right)^{1/(2n+1)}$$

Elle permet donc d'obtenir la nième décimale de $1/\pi$ en base 10. La portée de cette formule est limitée par la capacité à évaluer E_{2n} . Avec un Intel icore 9900K cadencé à 5 ghz, je suis arrivé sans trop de difficulté à calculer $E_{2\,300\,000}$. Donc la position 2 300 000 est calculable par ce procédé.

Au final, on peut donc calculer le nième chiffre décimal de π et de π^n. Le même procédé permet également de calculer la nième décimale des nombres suivants.

$$e^{\pi},\ \ln(\pi)\,,\sqrt{\pi}$$

La liste n'est pas exhaustive. En isolant $n!$ de l'équation on obtient une bien meilleure formule que celle de Stirling.

$$n! \approx \frac{(2\pi)^n B_n}{2}$$

Et avec les nombres d'Euler on obtient

$$n! \approx \frac{\pi^{n+1} E_n}{2^{n+2}}$$

Les 2 expressions sont en valeur absolue et n pair. Une analyse sommaire de l'erreur commise pour $n = 1000$ montre que pour la première l'erreur est de l'ordre de 2^{-1000} , soit 10^{-301} et 3^{-1000} ou 10^{-477} pour la 2ème . Avec la formule de Stirling, l'erreur est de l'ordre de 10^{-22} seulement. Comme avec les formules précédentes on peut améliorer encore plus si on rajoute des termes tirés de la fonction ζ(n).

Mais il y a mieux, en comparant deux termes successifs de l'expression avec les nombres de Bernoulli cela permet de se débarasser de l'exposant n. Si on fait le ratio, en effet on obtient pour π^2 une expression close.

On avait,

$$\pi \approx \left(\frac{2n!}{B_n 2^n}\right)^{1/n}$$

Et en comparant 2 termes successifs

$$\pi^2 \approx \frac{1}{2}\frac{B_{2n}\,(n+1)(2n+1)}{B_{2n+2}}$$

Qui est valide pour la base 4 étant donné que l'erreur est de l'ordre de 4^{-n} En appliquant la même technique avec les nombres d'Euler on a alors :

$$\pi^2 \approx \frac{8E_{2n}\,(n+1)(2n+1)}{E_{2n+2}}$$

Dont l'erreur par rapport à π^2 est 9^{-n}. Donc en base 9. On pourrait utiliser les mêmes arguments pour la base 10 dans les 2 cas en rajoutant des termes. D'où la question séculaire : exite t-il une interprétation des nombres de Bernoulli successifs permettant une interprétation combinatoire des chiffres binaires de π^2, la question est plausible. Pour les premiers 20 termes, la chose est possible je crois.

Vrai calcul de toutes les décimales de π.

Le procédé permettrait d'aller plus loin en calculant tous les chiffres. En effet, en poussant la formule avec beaucoup plus de termes on atteint assez facilement quelques millions de chiffres mais la vitesse de convergence n'est pas géométrique elle est polynomiale même si le degré est très élevé. Si on prend la plus grande valeur connue de B_{2n} (100 millions), on aura donc la série (ou produit si on prend le produit d'Euler) comme suit .

$$\left(\frac{2n!}{B_n 2^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\ldots}\right)^{1/n}$$

Donc, avec n = 100 millions, et même si on prend 1000 milliards de termes, on aura tout au mieux 1.2 milliards de chiffres de précision (1000 milliards = 10^{12}) donc 12 chiffres seulement. C'est beaucoup mais peu comparé aux 62000 milliards de chiffres obtenus récemment avec la formule de Chudnovsky, cette dernière a une vitesse de convergence qui est géométrique, de l'ordre de 14 chiffres décimaux par terme.

Autres formules asymptotiques contenant le nombre π.

Elles sont connues, d'abord la factorielle due à Stirling,

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,\left[1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288\,n^2}-\frac{139}{51840\,n^3}+\cdots\right]$$

Qui devient si on isole π et utilisant la méthode bootstrap

$$\pi \approx \frac{\Gamma(n)^2\, n^{1-2n} e^{2n}}{2\left(1+\frac{1}{6n}\right)\left(1-\frac{5}{36n^2}\right)\left(1+\frac{1}{72n^2}\right)}$$

Mais qui donne peu de précision puisque pour $\mathrm{n} = 10^9$ on obtient que 30 décimales de précision. Il est possible d'étirer à souhait la première expression mais cette convergence est polynomiale, le gain est marginal.

Une autre devenue célèbre grâce aux travaux de Ramanujan et Hardy dit que le nombre de partitions (ou partages d'un entier) est approximativement

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$$

Qui donne une fois inversée pour trouver π

$$\pi \approx \frac{\ln(48\, p(n)^2 n^2)\sqrt{6}}{4\sqrt{n}}$$

Qui a aussi une convergence assez lente même si $\mathrm{n} = 10^9$, ici on pourrait rallonger l'expression avec la formule de Rademacher bien plus complexe mais qui fait apparaitre le nombre π à plusieurs endroits ce qui rend l'opération d'inversion pour isoler plutôt difficile. On ne peut pas exclure cette possibilité pour l'instant.

Une autre avenue est founie par les binomiaux centraux,

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Encore une fois en isolant π on obtient :

$$\pi \approx \frac{16^n}{n\binom{2n}{n}^2}$$

Le développement asymptotique classique permet de gagner en précision,

$$\pi \approx \frac{16^n}{n\binom{2n}{n}^2\left[1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{32n^2}-\frac{1}{128n^3}-\frac{5}{2048n^4}\cdots\right]}$$

La précision obtenue si $\mathrm{n} \gg 1$ est largement supérieure aux 2 autres formules mais ne suffit pas à obtenir une précision de l'ordre du nième bit même si n est très grand. Si $\mathrm{n} = 10^9$ on obtient tout de même une centaine de décimales de précision. Le développement asymptotique est connu et fait apparaitre les nombres de Bernoulli qui grossissent en taille assez rapidement au-delà de 14 termes.

Donc, les formules obtenues avec les nombres d'Euler ou de Bernoulli sont de loin les plus précises.

Bibliographie

[1] Wikipedia, fonction β de Dirichlet :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_b%C3%AAta_de_Dirichlet
https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_beta_function

[2] Eric Weisstein, *Dirichlet beta function* :
https://mathworld.wolfram.com/DirichletBetaFunction.html

[3] *Abramowitz, Milton Stegun, Irene Ann, eds. (1983) [June 1964]. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Applied Mathematics Series.* ***55*** (Ninth reprint with additional corrections of tenth original printing with corrections (December 1972); first ed.). Washington D.C.; New York: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards; Dover Publications. ISBN 978-0-486-61272-0. LCCN 64-60036. MR 0167642. LCCN 65-12253.

[4] Plouffe, Simon, *On the computation of the n'th decimal digit of various transcendental numbers, 1996.* https://arxiv.org/abs/0912.0303.

[5] Plouffe, Simon, *An efficient algorithm for the computation of the Bernoulli Numbers.* Arxiv *:* https://arxiv.org/abs/math/0702300

[6] Plouffe, Simon, *The Construction of Certain Numbers with Ruler and Compass, le Calcul de Certains Nombres Avec la Règle et le Compas.* Vixra :
https://vixra.org/abs/1409.0135