Formules pour les nombres premiers

Par Simon Plouffe
15 septembre 2020

Résumé

Le présent article donne plusieurs formules pour les nombres premiers relativement simples. Elles permettent d'établir un record pour les polynômes, une autre donne des nombres premiers en progression géométrique et une dernière permet de trouver de nouveaux nombres premiers très similaires aux nombres de Fermat.

Les 3 formules sont :

$$A_n = \{cn^k\}$$

$$B_n = \{c^n\}$$

$$F_n = \{r^{2^n} + 1\}$$

1- Au-delà du polynôme d'Euler
2- Nombres premiers en progression géométrique
3- Nombres de Fermat modifiés

1- Au-delà du polynôme d'Euler

Le polynôme d'Euler, $n^2 + n + 41$ donne 40 nombres premiers en enfilade du moment que n = 0 à 39. De nombreuses tentatives pour aller au-delà de ce polynôme ont réussies à en trouver (en 2010) un autre du 6ème degré qui lui en donne 56.

$$\frac{n^6}{72} - \frac{5n^5}{24} - \frac{1493n^4}{72} + \frac{1027n^3}{8} + \frac{100471n^2}{18} - \frac{11971n}{6} - 57347$$

Trouvée par François Dress et Bernard Landreau. Rien de plus n'a été trouvé après. Je propose ici une approche différente à ce problème en posant le polynôme :

$$\{cn^k\}$$

Où $0 < c < 1$ est une constante réelle, $k \geq 2$ et est bien plus élevé que 2, k est fixe et entier. Le polynôme n'a qu'un seul terme et { } est l'arrondi à l'entier le plus près. On choisit d'abord k (par exemple 64) et on calcule la première valeur de c

$$p = nextprime(n^k)$$

$$c = \frac{p}{n^k}$$

On calcule ensuite la prochaine valeur de c en recuisant les valeurs de départ.

$$p = nextprime(\{ c^k\})$$

$$c_{k+1} = \frac{p}{(n+1)^k}$$

L'hypothèse de cette méthode est que les c_k sont constants et donnent une suite de valeurs premières. Quand k = 64, on trouve une suite de 8 premiers. Mais si k = 599 on en génère 70 avec le même procédé. Pour 599 la suite générée avec c =

```
1.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
000000000000000000000000000000000000000000000000000001556808232\
856463140060524522424280772934429200613394089802373785244587288\
947728630209290312111238140972072983869588571830870498647900351\
444778386216146076636515297094962921999030102707899655875083040\
665145525741443694679398437806398341541385226365101056503219529\
413038357761603719148231623498218255233850813147568998744093447\
755692241415245289626420200959624751354414736085310934015664680\
```

```
524107510074349656822480162844410900000000000000000000006345174\
532890027939294089368385587928671551372984708501441585620418908\
704346095361979911978459546006902805287612053866464609018035122\
943293118288150470557741929174121124290158771911527759861726269\
584165754859588606741441445142853262133802425477033893100601759\
975564856010884639189352574717896440249667645304974867391425986\
281906375105044471660347105158250104363991834652263421461752834\
975705269597512556117680247632410969440028501070105083651713662\
403142442324953222225461614957943694687384105246348009815340760\
743692542284884699931895728286412542979603098044884198867262644\
327255465732046886424762403984621514353794473387936916290029911\
549331529954509625933626714214956674379391784430822602413846681\
316909794084400273637943424856690207465817148161052758912779700\
994744869116506018623229585002806564436851770494944385807359855\
293872240395791047188062073418411994344296873461271952410865026\
038448423723192039177383879070574428090707165141606873722573750\
361413628118939617030810117859967828092642486835827304995753842\
763548295039042203138474167878091109846423833375302339937989596\
168347847772485744109449547853544023508997274222527142776574434\
316734525917951119963956001777673781864527502261570125603162371\
258224293816247417631732394744100802942101015408972089551902455\
081699086722777589571816095705739686859606854254953133788523318\
         655544571643416019528317460445413625249324735829
```

On en conclut que si k est bien plus grand on pourra avoir une liste plus longue. C'est exactement ce qui se produit. En posant, $k = 1001$ on trouve alors $c =$

```
1.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
0000000000000000000000000000000000125990588497934548663662088537715317898307345260180583 3\
23931435872455532981729710651349444158213948818545323640593772754269090815382794373303605\
31032253065209164543992867389533988645378869293054521535540437640264924717218337701861582\
63863610200230076170685773794205724815861643935173361519983613116882690284144248101920208\
06510182210643573796316380910863539606120370866893232496051485086497467990763578114679066\
43511345081362364422769127194021649235153662464913703294618822166887983870315588441106214\
81340962305982173042950831271359740413862293006103829962131522304901811854369079285560801\
56127395594055635262316335676598235139936600519471752446533884127775136800820321897034833\
69252163149601536619636700000000000000000000000000000000000002856922463537929582277227375\
34573209459155555553507901662476263229096688827287105130336980209309890445915932025320437\
91865264980534443344524609828999110761933292589504030787982875567498653229908488978554566\
67343197183608335096725513262211244819036081998055736478108166949284397076878265689251779\
50165437169403417121093904025741600510426629665273037772624863935742023884842513100551563\
13386198931648636209922198705909308260842342176288588385011256962600297234767059688581215\
42128399100716160760517497248823653252822696639553588275394359123882969533179056493207692\
39058072976876703918551210565097947101808802571780934485397548675096907719003422433055454\
36432892896196532241017067958091280226589158192434780052667595497166072344482563094303132\
07749969618831846158232622183434850148402756911211398935776546073125564968263058674825326\
78385994696717675249981709965958000987443947212244644763379515406938514672346131121294611\
46321844369295493249482895087729753260849786693705728092698851465492392173730706849962492\
31216596166252982070773148562282049797435559272711648811046626031928698550228861837334923\
47445282121848836355413332570898852324742813132203189317097096931337090249364473376188254\
80333372330490460254399100556222506183678193972395584173595952332514796665024284845488485\
64456888046546242546151999688740068991295519427373610371260392861045349960918614305187606\
01199946505452669414820340092566861924748261672447488843829277513346089163004507571313765\
06792446848015950986087309825879656484491208770711299508536138483156405005289125879215048\
26258088459413010473109268527768400545228463809891383098883080726850216779393886850653390\
                              028295392279403345251876621259 0
```

On trouve alors 104 valeurs premières, ce qui bat le record de longueur pour les premiers et les Ici les premiers sont donnés par $\{cn^{1001}\}$ et $n = 2..105$.

2- Nombres premiers en progression géométrique

À l'heure actuelle, la question de savoir si une formule exacte existe pour les nombres premiers est oui et non à a fois. Il y a bien des formules qui les donnent mais elles sont soit impraticables ou limitées (voir tableau en appendice). Par exemple voici une formule explicite qui en donne quelques-uns en progression géométrique est :

$$f(n) = \{ c^n \}$$

Ici, { } est l'arrondi de. Un exemple, le plus simple est : si c = 2.553854696 alors $f(n)$ est 3, 7, 17, 43, 109, 277, 709. La suite ne comporte que 7 termes. Mais peut-on aller plus loin ? En utilisant la méthode du recuit simulé et Monte-Carlo on peut aller bien plus loin.

Constante c telle que $\{c^{\mathrm{n}}\}$ est premier	valeurs	Nombre de premiers générés.
2.553854696…	3, 7, 17, 43, 109, 277, 709	7
2027.1671684764912194343956	n=1..97	97
577.181936975247888…	n=1..22	22
593.46526943871…	n=2..48	47
31622.7767185595693…	n=2..388	387
55237.07504296764715433124781528617…	n=2..633	632
999982.6807693608…	n=1..899	899

De là on peut conjecturer que si c est suffisamment grand, la suite avec la formule peut générer un nombre arbitraire de premiers explicitement, voir [23].

3- Nombres de Fermat modifiés

La formule de Fermat dit que $F_n = \ 2^{2^n} + 1$ est premier pour n=1..4 et rien n'a été trouvé depuis Fermat. Mais si on pose l'équation $F(n) \ = \{ \, r^{2^n} + 1 \, \}$ plutôt et qu'on cherche une valeur de r telle que F(n) soit premier, est-ce que ça peut fonctionner ? En posant r = 2, ça ne donne que les nombres de Fermat bien connus et qui ne donnent rien de bon au-delà de n = 4. En posant que r est réel et en utilisant la méthode de Monte-Carlo et le recuit simulé on trouve assez vite (quelques minutes de calcul) une valeur de r appropriée.

Si r =

```
1.0905077326791430132605074341378715488761691391552537796370717401124829019411317949276 14\
1650460707278759474530495684566446386638634014529693049836960393684219662879541451034978 5\
```

$$F(n) \ = \{ \, r^{2^n} + 1 \, \}$$

Qui donne les nombres,

```
2, 3, 5, 17, 257, 65537, 4294967311, 18446744193968636141,
340282371357715587431288126011714099603,
115792092256830257597513487698137234684227436353307972878385071833485576558709, 134078086\
2921428969819174269517228438434352530992365173869315429295975448334976087049286068364 8451\
3268122749515235125357093412210435308279378947037706292 79, 179769332237633170170088026884\
5084505926072573198825857296702146995714121255403627343303352717030781918266757962036 0866\
3247107757378537767567624250734942262518894336690676457667314152856262300200794201665 7593\
9088386709748029472637851770658727626748429950020441235540714100605749437292450225721 9698\
```

352110801927, 323170128131645365815076255135382646669278924751793572195552962545141719652\
64801403285247181358559850418369614308791215550771771474749468184741737297690057465193509\
63945905691375542263397996520864769510659365204874119526029393967225952392638861315457919\
63108282494937753987330958790356284722814028831250184315941475044351819744600571075621618\
91978078908010514773644027856618091755427013769073948650806222690073031800766002745811262\
17470632677757168145724097916814902375242298300482723097426477384391005496248708782736397\
85136638055501928789129239806873288362297236918221684091632681230224992540958690935289708\
05311667, 1044389317166240834594605377443097823907897351158848968802396223990763915529923\
35735754205395972104335511348468746703462926848540116993310568418686077261633016448147919\
18781556374086563714969978706718863915534446770744346798098445623101221088765942162306552\
14621897440640949470144818060504055261313257506351263985875277343435085681089703739446815\
48500161594788046362932860178367430582323227819014770251706417135952611655420880255303182\
64681512789697795902401025093747702623759547554737815750417887995127647950217987243038766\
77533890003260364907468957019674181713392537979549059382616660583120543334829823484146591\
47717501906341315211489961755543220463855382535950075700566535477413593697275201691979923\
38641568982946895521986824611585033511719052239621316679060986921373718762688888837745422\
83169367906229978113397931970222522988444158095482888380174612676484538739600000996356088\
45000911940693727397524975428611394844926595732425377211428922912540710834804687928863044\
33679420861353478682425113923228694593794164457617570785058604598399524014935395382862380\
98333161261112242273472110203395411585454959169383671956007018359097021603202728284219951\
102044249080006323598825172316922737869910163299754485996931556116349948454919395698791,
10907490458109667924271757791513592293983166654301156822150591558598181044442382010399174\
92919511601279745737961889572367787422187043894748772952513879077053306947607149615936661\
75112967878119912006205571981584069736977530603282183549613013123916787655598082588924149\
40891379369301309816262380113991728427333406116199557348489554551799814745807267443201348\
34707865566910864427699247698231429315759272436031068117019906918001830336446962391804107\
22985340156979073167257435430296713066681084447199038191801425151002140169249568182087355\
37216931832857484768370735100604211780047308319725147598436806135282678368780265876110257\
53988182574348514613527544858201515292421197926011282801578254357559923204391580750693084\
80293384143141225083638688402007089934075995374391110014446085562005376548363427140256578\
80908388428167581904401650025654343131473880484355345444054888207153825885498689967570953\
70985204324044035890167854980468740591429549828136949302322295576903613561409781403727774\
85357093055388039711174843200724936509378775007630503199092851376287125049320867683678108\
33352369655462724762257881165906356802040669563085578699320870099396037097662944064618881\
78983789996479926314834866382506382527233365361033178023818660797724861354693574334402892\
64201680765323750650601736988219125208588373661116687694701583189612511308498971041370105\
66940709481058594272986767876269978297997496028861741255819903164165855307471882021560488\
46419624409275268608448955329531354914194090887107690516242871900980302183047175728790288\
75725800629989849920195442450635678864794991294524049166732285923131275124915709630178011\
95007750822749047043672754341054932799971741515843977613033068821444197643295712208115235\
28096036461198603387546097428870083996323823306860603984960807123643767912944085743355903\
55150134317023096965637947743236134732979702590603391356175620665336125866408430315394702\
89835851661541255483770242672579803599405016279803061405113768381039638122682649588584888\
93930854366167295599946845670094424486542939255420837897352516799960987153631076804984709\
95101269541394419133543181784050825199638913349633307664893542738931263128355685853014270\
39519093232327765542481347851062836108789141693181881486942394111395782143969968340113780\
00491584853335395982836075034898639850515917970108430905151231503584598134574477059277161\
06628882069129509101520519702817443789175537317708652543820801180775690044296871487181349\
4856853443180640274846511668911244308922936908792273552407473599, …

Bibliographie :

[1] Encyclopedia of Integer Sequences, N.J.A. Sloane, Simon Plouffe, Academic Press , San Diego 1995.

[2] Mills, W. H. (1947), *A prime-representing function, Bulletin of the American Mathematical Society 53 (6): 604, doi:10.1090/S0002-9904-1947-08849-2*.

[3] *E.* M. Wright (1951). *A prime-representing function. American Mathematical Monthly. 58 (9): 616–618.*

doi:10.2307/2306356. JSTOR 2306356.

[4] The OEIS, Online Encyclopedia of Integer Sequences, sequences :
sequences A051021, A051254, A016104 and A323176, A006988,
A006880.

[5] Wikipedia : formulas for primes (effective and non-effective formulas).
https://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes

[6] Baillie Robert, The Wright's fourth prime:
https://arxiv.org/pdf/1705.09741.pdf

[7] Wikipedia : Le recuit simulé : https://fr.wikipedia.org/wiki/Recuit_simul%C3%A9

[8] Wikipedia : Simulated Annealing :
https://en.wikipedia.org/wiki/Simulated_annealing [9] László Tóth, A Variation on Mills-Like Prime-Representing Functions, ArXiv :
https://arxiv.org/pdf/1801.08014.pdf

[10] Makoto Kamada Prime numbers of the form 7, 73, https://stdkmd.net/nrr/7/73333.htm#prime

[11] Plouffe, Simon : Pi, the primes and the Lambert W function, conference in July 2019, Montréal at the ACA 2019 (ETS). https://vixra.org/abs/1907.0108

[12] Gram, J. P. "Undersøgelser angaaende Maengden af Primtal under en given Graeense." *K. Videnskab. Selsk. Skr.* 2, 183-308, 1884.

[13] Kim Walisch, primecount and primesieve, fastest program to compute primes.
https://github.com/kimwalisch/primecount

[14] Visser, Matt : Primes and the Lambert W function :
https://arxiv.org/abs/1311.2324 [15] Berndt, Bruce, Ramanujan Notebooks IV, page 124.

[16] Dusart, Pierre, Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers, thèse de Doctorat 1998. [17] Plouffe, Simon, List of primes computed by the primecount program :
http://plouffe.fr/NEW/list_primes_pi_of_n_100000000000.txt
http://plouffe.fr/NEW/list_primes_10000000000.txt

[18] Kahane, Jean-Pierre, le nombre cet inconnu. : http://ww3.ac-poitiers.fr/math/prof/resso/kah/conf.pdf [19] Skewe's Number on wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Skewes%27s_number

[20] Salvy, Bruno, Fast computation of some asymptotic functional inverses, J. Symbolic Comput.17(1994), 227–236

[21] Mendès-France, Michel, Tannenbaum Les nombres premiers, entre l'ordre et le chaos.

[22] Plouffe, Simon , Pi, the primes and the Lambert W function. Conférence ACA 2019, Montréal ETS. https://vixra.org/abs/1907.0108

[23] Plouffe, Simon , Nombre premiers en progression géométrique : http://plouffe.fr/NEW/