Les nombres premiers, les zéros de la fonction ζ et la fonction W de Lambert

par
Simon Plouffe
23 juin 2019

Résumé

Un nouveau modèle est proposé pour représenter ces quantités. En premier lieu, 4 formules sont données qui sont déduites des résultats classiques, ensuite un principe est appliqué, appelé *matriochkas* ou des poupées russes qui permet de trouver des développements asymptotiques remarquablement simples et élégants. De plus, les développements obtenus sont tous très similaires.

Abstract

A new model is proposed to represent these quantities. In the first place, 4 formulas are given which are deduced from the classical results, then a principle is applied, called *matriochkas* or Russian dolls which allows to find remarkably simple and elegant asymptotic expansions. Moreover, the developments obtained are all very similar.

Introduction

En 1902 M. Cipolla a publié une formule pour le n'ième nombre premier.

$$p_n = n(ln(n) + ln(ln(n)) - 1 + o(n)$$

Plus précisément, on a

$$p_n \sim n\left(\ln(n) + \ln(\ln(n)) - 1 + \frac{\ln(\ln(n)) - 2}{\ln(n)} - \frac{\ln(\ln(n))^2 - 6\log(\ln(n)) + 11}{2\ln(n)^2} + \cdots\right).$$

Elle semble très précise, une implantation récemment faite par B. Salvy permet d'avoir des dizaines de termes du développement asymptotique [3]. Malgré cette imposante formule, si on teste avec le rang du nombre premier le plus étendu connu à l'heure actuelle, soit 10^{24}, on a : (voir A006988 du catalogue OEIS, [10],[11]).
$p_{10^{24}} = 58310039994836584070534263$, la précision obtenue avec 72 termes du développement de Cipolla [1] ne permet que d'avoir 12 décimales exactes de ce nombre. L'expression de la formule à 72 termes a une taille de 346000 caractères. On en conclut rapidement que la limite pratique de la formule est vite atteinte, la valeur plafonne à 12 chiffres de précision.

Ce que dit le résultat classique est que le nième nombre premier est environ $n\,ln(n)$ et que la quantité de nombres premiers inférieurs ou égaux à n est $\pi(n) = \frac{n}{ln(n)}$ lorsque n→ ∞. On remarque également que l'une quantité est l'inverse fonctionnel de l'autre ou fonction réciproque, mais ici pas exactement.
En effet, si $n\,ln(n)$ est le nième nombre premier, la fonction réciproque est plutôt $\frac{n}{W_0(n)}$. $W_0(n)$ est la fonction de Lambert W. Réciproquement, $\frac{n}{ln(n)}$ est l'inverse fonctionnel de -$nW\left(-1, \frac{-1}{n}\right)$. On peut poser que plutôt que de prendre $\frac{n}{ln(n)}$, on prend l'approximation $\frac{n}{ln(n)-1}$ [Dusart 2010] dont la réciproque est plutôt :

$$p_n \approx -nW\left(-1, \frac{-e}{n}\right).$$

Nous avons donc les quantités

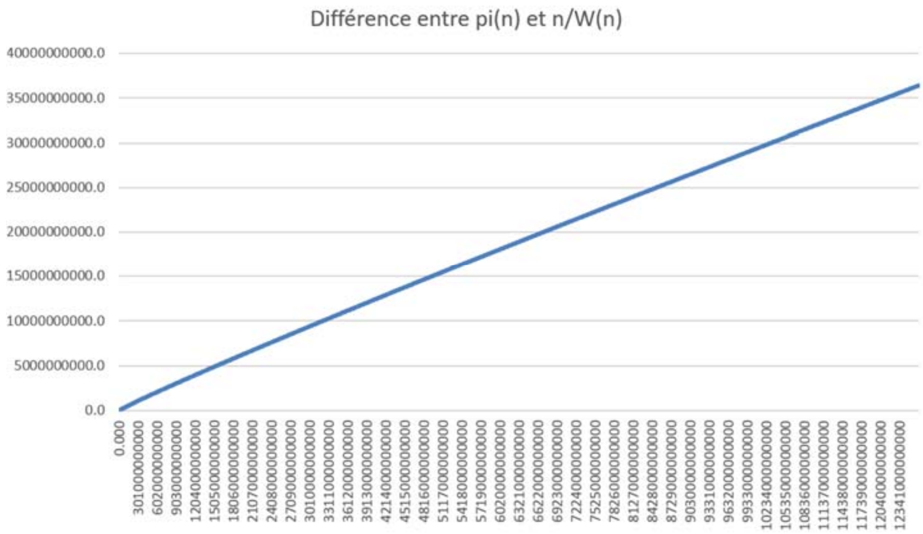
$$\pi(n) \approx \frac{n}{W_0(n)} \qquad\qquad p_n \approx -nW\left(-1, \frac{-e}{n}\right).$$

Où p_n est le nième nombre premier, pour des raisons pratiques on peut aussi écrire

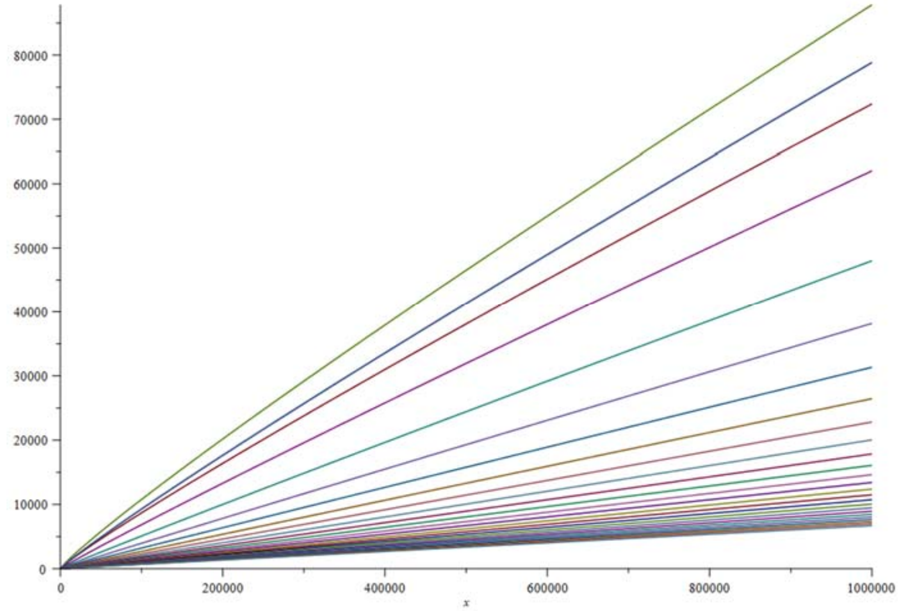
$$\pi(n)/n \approx \frac{1}{W_0(n)} \qquad\qquad p_n/n \approx -W\left(-1, -\frac{e}{n}\right).$$

Analyse du reste

En comparant $\pi(n)$ et $\frac{n}{W_0(n)}$, on retrouve un graphique très semblable à $\pi(n)$ à la différence près que l'ordre de grandeur de la différence est 10 fois plus petite mais la courbe est la même. À grande échelle, cette différence est assimilable à une droite mais c'est une erreur.



Si on compare avec les valeurs de W_k(n), n ≥ -1 et $\pi(n)$ de on a :



La vraie valeur de $\pi(n)$ se situe entre les courbes de W_k(n), mais W_k(n) n'est valide que pour les k entiers. C'est bien dommage puisqu'il suffirait d'un seul coefficient k non entier pour avoir la vraie valeur de $\pi(n)$?. Cette droite apparente est assimilable à une courbe logarithmique, si on calcule la courbe qui passera par l'une des courbes de W_k(n) ou même $\pi(n)$ on obtient un coefficient de corrélation proche de 1 mais c'est aussi une erreur.

Pour le nième nombre premier, selon la formule inversée on a

$$p_n \sim n\left(\ln(n) + \ln(\ln(n)) - 1 + \frac{\ln(\ln(n)) - 2}{\ln(n)} - \frac{\ln(\ln(n))^2 - 6\log(\ln(n)) + 11}{2\ln(n)^2} + \cdots\right).$$

$$W_0(n) \approx L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2(-2 + L_2)}{2L_1^2} + \frac{L_2(6 - 9L_2 + 2L_2^2)}{6L_1^3} + \frac{L_2(-12 + 36L_2 - 22L_2^2 + 36L_2^3)}{12L_1^4} + \cdots$$

avec $L_1 = \ln(n)\ et\ L_2 = \ln(\ln(n))$.

Les deux formules sont assez semblables puisqu'elles utilisent $\ln(x)\ et\ \ln(\ln(x))$.

Mais, si on compare l'erreur entre $-nW\left(-1, \frac{-e}{n}\right)$ et $nlog(n)$ on observe les faits suivants :

1- L'ordre de grandeur de l'approximation est bien plus petit avec $-nW\left(-1, \frac{-e}{n}\right)$.
2- La courbe de l'erreur semble être de même nature que la courbe originale qui à première vue est une droite, en y regardant de plus près (avec un calcul poussé), elle est assimilable à une courbe logarithmique $a + ln(n)$. Mais aussi, cette courbe peut être assimilée à la fonction de Lambert pour un k donné : $W_k(\mathrm{n})$, il suffit de prendre $\frac{n}{W_k(\mathrm{n})}$ pour un certain k.
3- L'erreur avec $-nW\left(-1, \frac{-e}{n}\right)$ est comparable à la formule de Cipolla si on prend quelques termes du développement.

D'où l'idée de trouver ce qui manque à $-nW\left(-1, \frac{-e}{n}\right)$ pour être plus près de la vraie valeur. En prenant comme 2ème terme $\frac{n}{W_0(n)}$, on se retrouve étrangement dans la même situation. Comme si en fait le terme principal $nlog(n)$ ne cachait pas en quelque sorte une série de fonctions semblables comme avec les *matriochkas.* Ce qui revient à affirmer que

$$p_n \cong n\left\{-W_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \frac{n}{W_0(n)} - \cdots\right\}$$

En comparant l'erreur après 2 termes, on est encore plus près de la vraie valeur, en comparant encore plus loin pour $p_{10^{24}} = 58310039994836584070534263$, on a 6 décimales exactes. C'est moins qu'avec la formule de Cipolla mais la l'expression de cette approximation pour p_n est nettement plus simple et élégante. Si on veut avoir un 3ème terme du développement (en supposant que le principe des poupées russes soit valide), pour $p_{10^{24}} = 58310039994836584070534263$ on obtient le développement suivant.

$$p_{10^{24}} = 10^{24}\left\{-W_{-1}\left(\frac{-e}{10^{24}}\right) - \frac{10^{24}}{W_0(10^{24})} - \frac{10^{24}}{W_{114}(10^{24})} - \frac{10^{24}}{W_{96606}(10^{24})} \cdots\right\}$$

L'approximation obtenue est valide à 12 décimales exactes, ce qui est équivalent au développement de Cipolla même avec 72 termes. Si on pousse plus loin le calcul, le 5ème terme est

$$\frac{10^{24}}{W_{3505881563}(10^{24})}$$

La précision obtenue alors est 24 décimales exactes, $p_{10^{24}}$ a 26 chiffres.
Pour obtenir la valeur k dans $\frac{n}{W_k(n)}$, pour un n donné, il suffit d'utiliser la méthode dichotomique, on peut avoir une approximation de k en utilisant la formule 4.20 de [6].

$$W_k(\mathrm{n}) \approx \log(\mathrm{n}) + 2\pi ik + \log(\log(n + 2\pi ik))$$

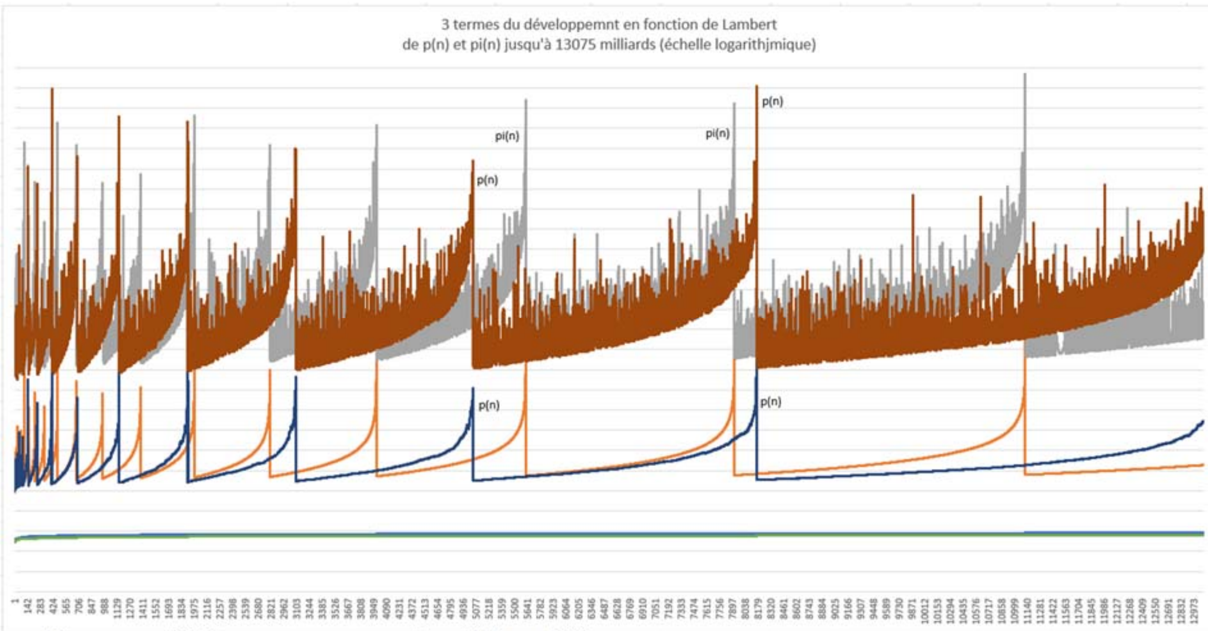
Maintenant, à la lumière de ces expressions, il est raisonnable de penser que $\pi(n)$ suit la même logique. $\pi(n) \approx \frac{n}{W_0(n)}$ et on cherche les autres termes du développement basé sur la méthode dichotomique.

En effectuant le calcul à 10 000 000 on obtient

$$\frac{p_{10^7}}{10^7} = -W_{-1}\left(\frac{-e}{10^7}\right) - \frac{1}{W_0(10^7)} - \frac{1}{W_{22}(10^7)} - \frac{1}{W_{763}(10^7)} - \frac{1}{W_{5323546}(10^7)} - \cdots$$

$$\frac{\pi(10^7)}{10^7} = \frac{1}{W_0(10^7)} - \frac{1}{W_{22}(10^7)} - \frac{1}{W_{640}(10^7)} - \frac{1}{W_{2174463}(10^7)} - \cdots$$

On constate que leur développement est très similaire et que le principe des poupées russes semble s'appliquer à $\pi(n)$. En poussant le calcul jusqu'à 13075 milliards on obtient le graphe suivant.



Les pics sont prévisibles si on peut calculer le k dans $W_k(\mathrm{n})$ en fonction de l'erreur pour un n donné. Si l'erreur est près d'une valeur de $W_k(\mathrm{n})$ il y a aura un pic prononcé à cet endroit, ou dit autrement, l'approximation de $\pi(n)$ ou de p_n sera excellente. Nous y reviendrons.

Les zéros de la fonction ζ

Récemment, André LeClair et Guillerme França [5], ont obtenu une formule pour le nième zéro de la fonction ζ. L'astuce est relativement simple et est basée sur le même raisonnement avec l'inverse fonctionnel.

Le nombre de zéros de la fonction ζ , N(n) est

$$N(n) \approx \frac{n}{2\pi}\log\left(\frac{n}{2\pi}\right) - \frac{n}{2\pi} + \frac{11}{8}$$

Par conséquent le nième zéro est l'inverse fonctionnel de cette équation, on l'obtient facilement avec soit Maple ou Mathematica ou Sage-Math.

$$\sigma(n) \approx \frac{(8n-11)\pi}{4\,W\left(\frac{8n-11}{8e}\right)}$$

Elle est incroyablement précise, $\sigma(1) = 14.521346\ldots$ alors que la vraie valeur est 14.13472514…. Tellement précise qu'ils sont arrivés à calculer des valeurs de n avoisinant 10^{1000} avec une précision arbitraire. La formule donnant une très bonne approximation, il suffit après d'utiliser l'algorithme de Newton pour avoir une meilleure précision. Ça devient trivial de calculer $\sigma(n)$ même pour des valeurs de n très grandes, c'était assez difficile et ardu avant.

Donc, ce principe d'inverse fonctionnel est assez bon si on a de l'un des côtés une expression pour le nième terme ou le nombre de termes selon le cas. Par exemple, selon la théorie une approximation du nombre de zéros est $\frac{n}{2\pi}\log\left(\frac{n}{2\pi}\right) - \frac{n}{2\pi}$, conséquemment le nième zéro de la fonction ζ devrait être plutôt

$$\sigma(n) \approx \frac{2\pi n}{W\left(\frac{n}{e}\right)}$$

C'est moins précis qu'avec la formule de LeClair-França, le but ici est de trouver un premier terme du développement en 'fonction de Lambert' qui soit le même qu'avec les nombres premiers. En effet, en faisant la même opération d'une part et d'autre des identités classiques on obtient ces 4 formules.

$$p_n \cong n\left\{-W_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right) - \sum \frac{1}{W_r(n)}\right\} \tag{1}$$

$$\pi(n) \cong n\left\{\frac{1}{W_0(n)} - \sum \frac{1}{W_s(n)}\right\} \tag{2}$$

$$N(n) = 2\pi n\left\{-W_{-1}\left(\frac{-2\pi}{n}\right) - \sum \frac{1}{W_t(n)}\right\} \tag{3}$$

$$\sigma_n = 2\pi n\left\{\frac{1}{W_0\left(\frac{n}{e}\right)} - \sum \frac{1}{W_u(n)}\right\} \tag{4}$$

$p_n, \pi(n), N(n)$ et σ_n étant le nième nombre premier, le nombre de nombres premiers, le nombre de zéros de la fonction ζ et le nième zéro de la fonction ζ. Les fonctions r,s,t et u sont des indices dans $\mathbb{N}$. Le 3ème terme de la formule (1) est assez proche du logarithme en base 2, la même chose avec la formule (2) mais un peu plus grand.

On remarque ceci, les 4 équations sont remarquablement symétriques. Celles avec la fonction ζ utilise 2π, il y a une symétrie aussi avec e = exp(1). La précision de la formule 4 est quand même assez bonne compte tenu du terme 11/8 qui a été amputé dans l'équation inverse.

Les fonctions r,s,t, et u sont encore inconnues, on a seulement un ordre de grandeur de l'index pour une fonction donnée. En gros, chaque terme double la précision obtenue.

Une fois le premier terme calculé, la valeur du reste dans les 4 cas est $<<$ 1.

Bibliographie

[1] M. Cipolla, *La determinazione assintotica dell' nimo numero primo,* Rend. Accad. Sci. Fis-Mat. Napoli (3) 8 (1902), 132–166.

[2] P. Dusart, *The k-th prime is greater than k(log k + log log k − 1) for k_ 2*, Math. Comp. 68 (1999), 411-415.

[3] B. Salvy, *Fast computation of some asymptotic functional inverses*, J. Symbolic Comput. 17 (1994), 227–236.

[4] Visser, Matt, Primes and the Lambert function : https://www.mdpi.com/2227-7390/6/4/56/htm

[5] LeClair, André, França, Guillerme, : Transcendental equations satisfied by the individual zeros of Riemann *ζ*, Dirichlet and modular *L*-functions https://arxiv.org/pdf/1502.06003.pdf :

[6] *Corless, R. M.; Gonnet, G. H.; Hare, D. E. G.; Jeffrey, D. J.; Knuth, D. E. (1996). "On the Lambert W function"* (PostScript)*. Advances in Computational Mathematics.* ***5****: 329–359.* arXiv*:*1809.07369*.*

[7] The Lambert function : http://www.orcca.on.ca/LambertW/

[8] The Lambert W-function : https://dlmf.nist.gov/4.13

[9] Hayes, Brian : American Scientist, 2005 https://www.americanscientist.org/sites/americanscientist.org/files/2005216151419_306.pdf

[10] OEIS, Online Encyclopedia of Integer Sequences : http://oeis.org

[11] Encyclopedia of Integer Sequences, Neil J.A. Sloane, Simon Plouffe, 1995 , Academic Press.

[12] Lambert W function : https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function