Les chiffres

1, 2, 3, 5 et la suite

Simon Plouffe

Assez difficile de faire plus numérique que des chiffres…

- Au début, au siècle des lumières (1700-1800), la science mathématique subissait une métamorphose avec la découverte du calcul numérique.
- On s'est aperçu qu'en tabulant une fonction on pouvait prédire quelque chose.
- Mais avant on faisait comment ? Essentiellement des rapports géométriques issus de la géométrie classique (Euclide et autres grecs).
- C'est au courant de 1600 que sont apparues les premières tables de logarithmes, et à peu près à la même époque les règles à calcul.

Table de logarithme ? Règle à Calcul ?

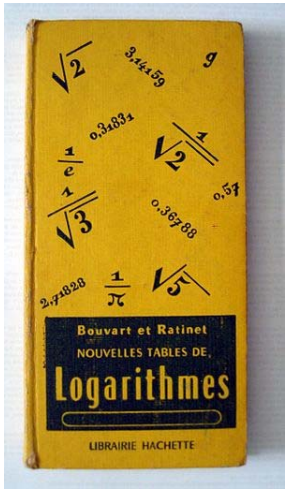
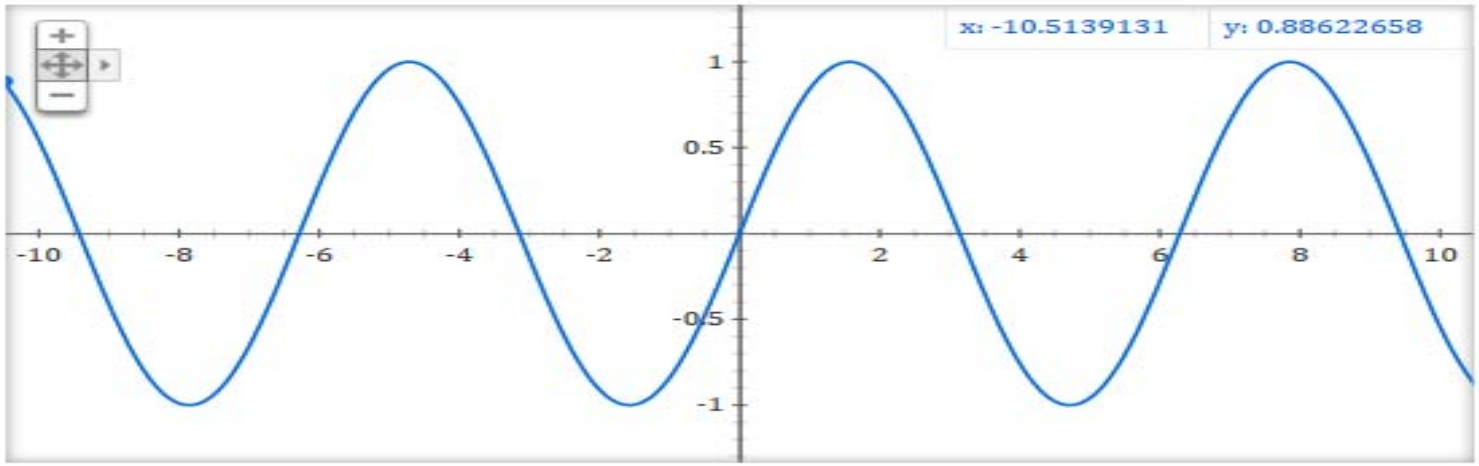


Table de logarithme Bouvart et Ratinet
(1905) et encore utilisée en 1980
Napier 1614 d'où le nom de logarithmes népériens.

N	0	1	2	3	… 9
10	0000	0043	0086	0128	…
11	0414	0453	0492	0531	…
12	0792	0828	0864	0899	…
13	1139	1173	1206	1239	…
14	1461	1492	1523	1553	…
15	1761	1790	1818	1847	…
16	2041	2068	2095	2122	…
17	2304	2330	2355	2380	…
18	2553	2577	2601	2625	…
19	2788	2810	2833	2856	…

On les utilisait pour les calculs astronomiques, financiers.

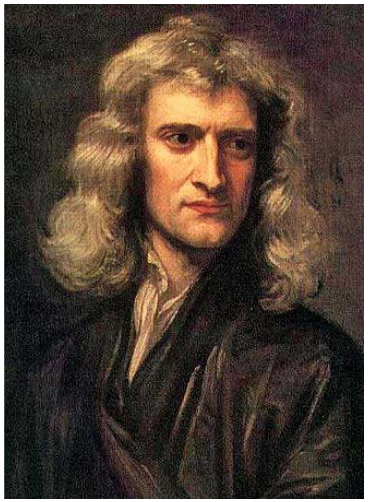
- Donc on savait calculer une fonction comme sinus



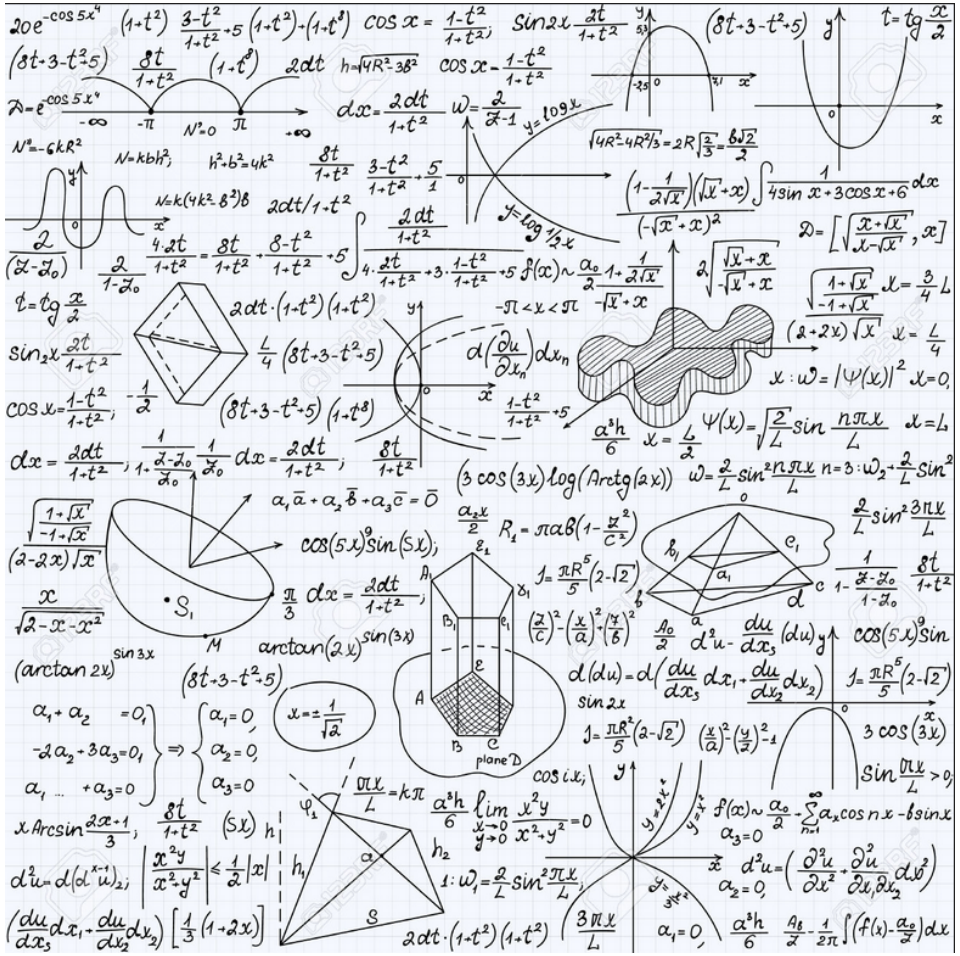
Mais c’est Newton qui a systématiquement mathématisé le procédé

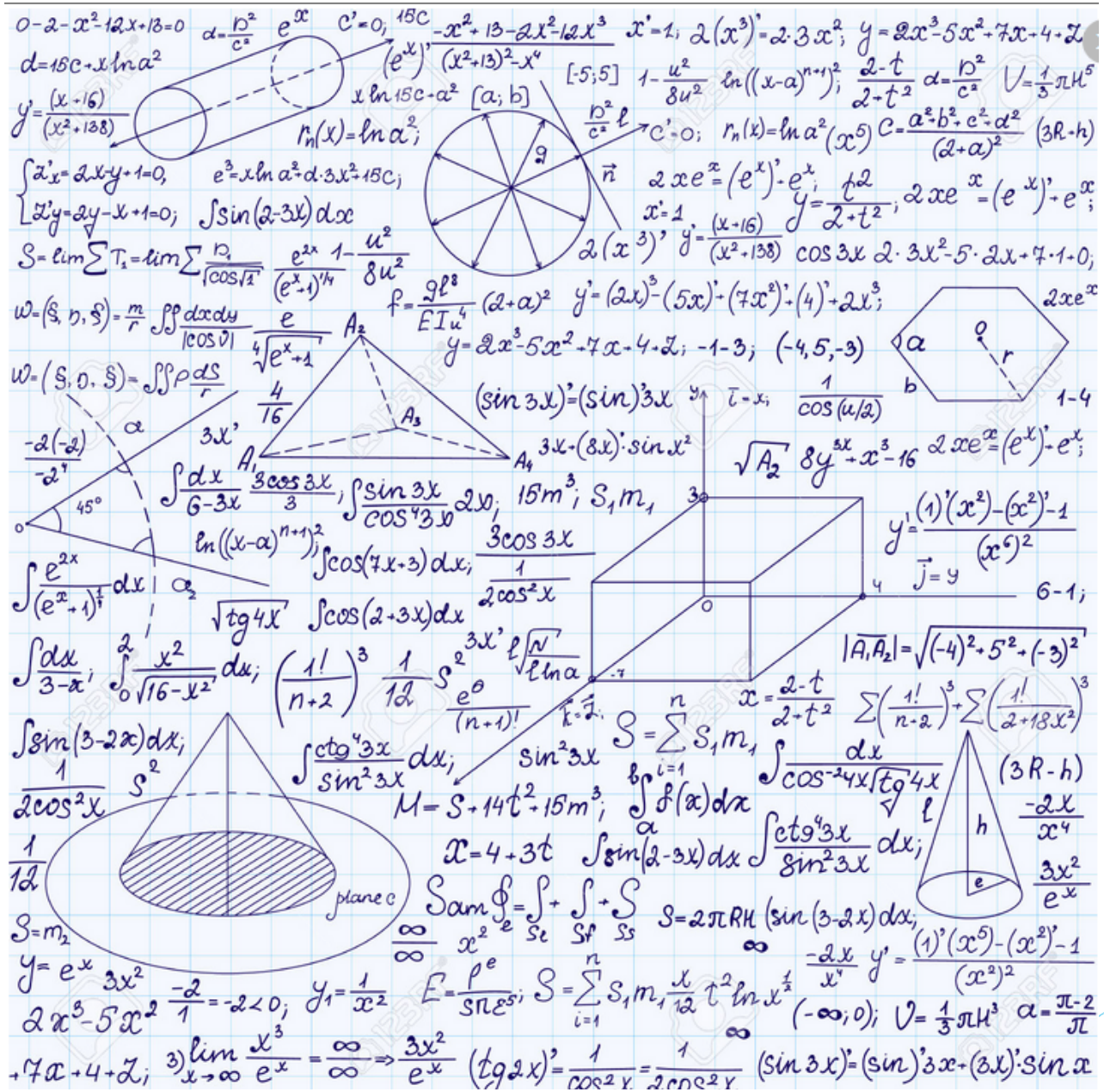
- Différences de Newton

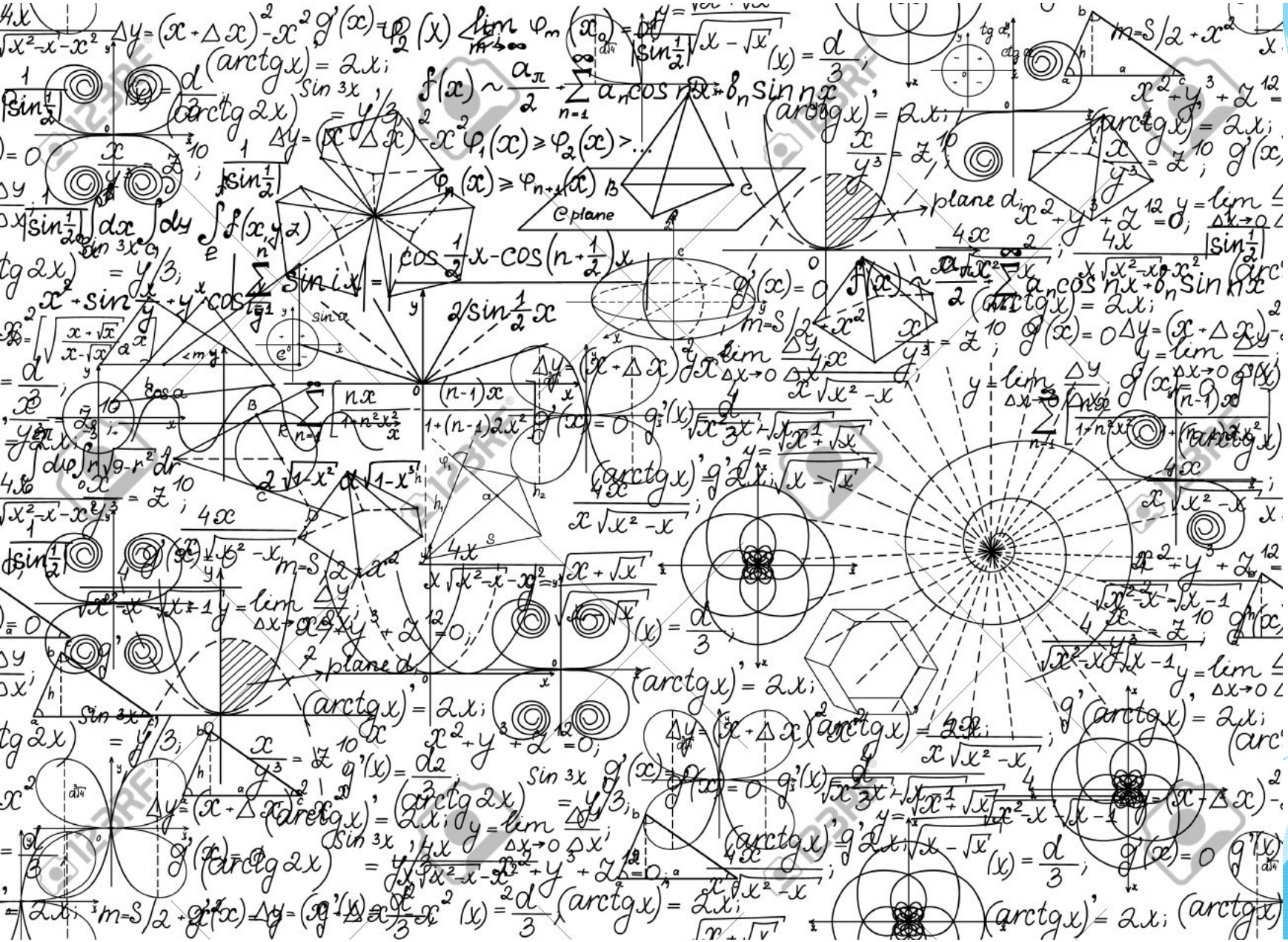
i	x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	1.0	.0				
			1.0986			
1	3.0	1.0986		-0.5878		
			0.5108		0.4135	
2	5.0	1.6094		-0.1743		-0.3244
			0.3365		0.0891	
3	7.0	1.9459		-0.0852		
			0.2513			
4	9.0	2.1972				



Et puis arriva l’analyse mathématique



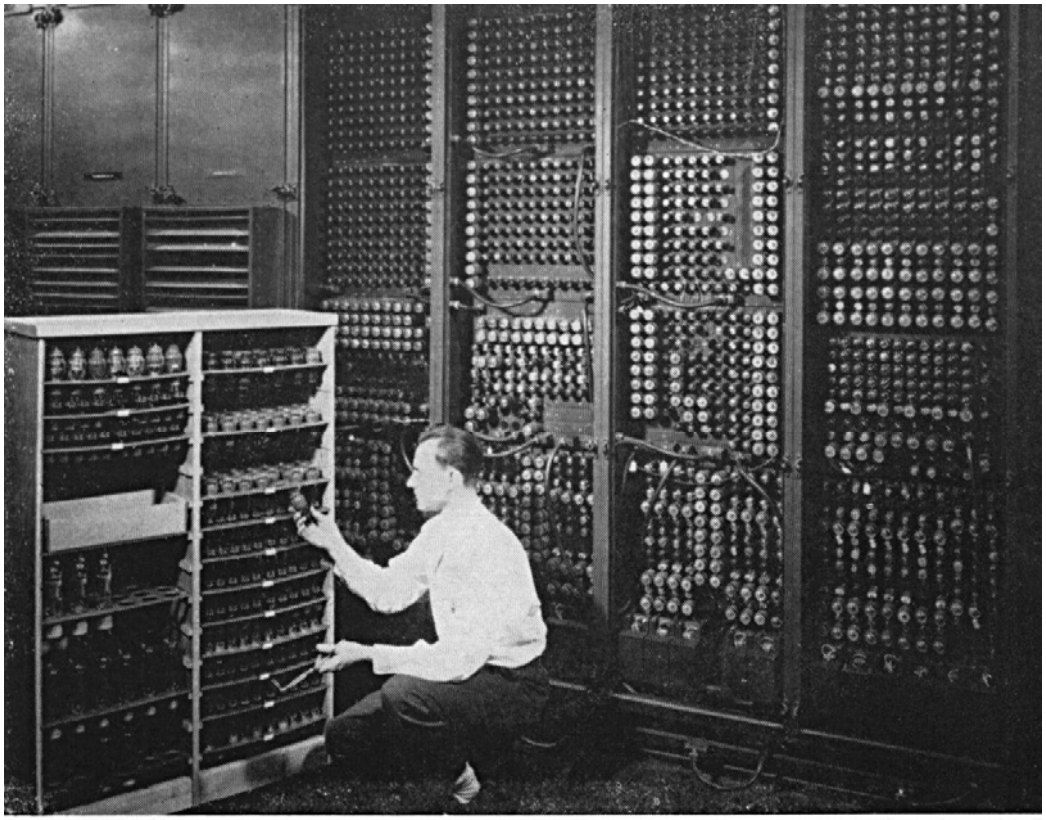




Et jusqu'à tout récemment, on a procédé de cette façon.

- À un phénomène donné, on peut calculer la trajectoire d'une planète, l'heure des marées (et la trajectoire d'un obus)…
- Et arriva l'ENIAC en 1948 : Sa première tâche a été de :
- Calculer le nombre $\pi = 3{,}14159$ … et le nombre $e = 2{,}71828182845$ … (base des logarithmes naturels) à 2000 décimales.
- ENIAC = Electronic Numerical Integrator Analyzer and Calculator.
- *17468 tubes, 70000 résistances, 10000 condensateurs.*
- *30 tonnes,* 2,4 × 0,9 × 30,5 mètres, sur 167 mètres carrés et qui bouffe 150 KW d'électricité, un monstre.
- *5000 additions par seconde, 357 multiplications ou 38 divisions par seconde (seulement).*

ENIAC 1948



Replacing a bad tube meant checking among ENIAC's 19,000 possibilities.

Malgré sa taille, il calculait vite…

Moyen employé	Vitesse de multiplication de nombres de 10 chiffres	Calcul d'une trajectoire d'une table de tir
Homme à la main, ou machine de Babbage	5 min	2,6 jours
Homme avec calculateur de bureau	10 à 15 secondes	12 heures
Harvard Mark I (électromécanique)	3 secondes	2 heures
Model 5 (électromécanique)	2 secondes	40 minutes
Analyseur différentiel (analogique)	1 seconde	20 minutes
Harvard Mark II (électromécanique)	0,4 s	15 minutes
ENIAC (électronique)	0,001 s	3 secondes

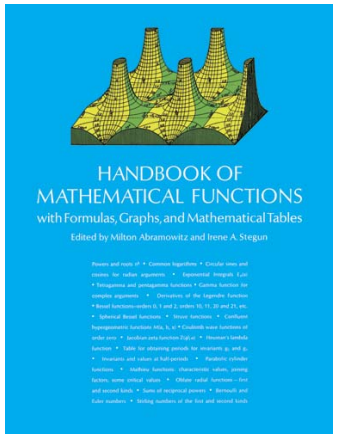
Table extraite du livre ‘Handbook of Mathematical Functions 1964

TABLE 1.1. MATHEMATICAL CONSTANTS—Continued

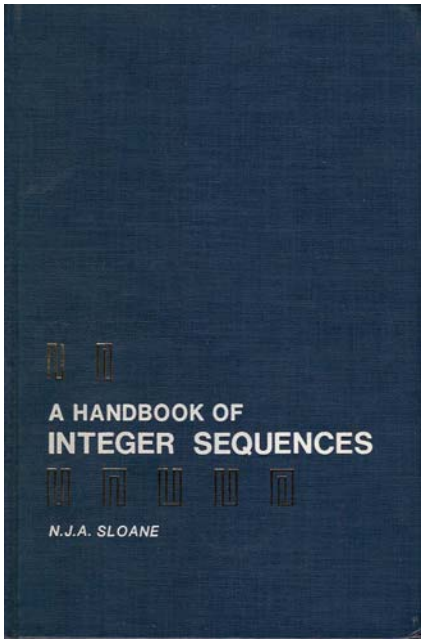
n	$\ln n$	n	$\log_{10} n$
47	3. 8501 47601 71005 85868 209507	47	1. 6720 97857 93571 74644 14219
53	3. 9702 91913 55212 18341 444691	53	1. 7242 75869 60078 90456 32992
59	4. 0775 37443 90571 94506 160504	59	1. 7708 52011 64214 41902 60656
61	4. 1108 73864 17331 12487 513891	61	1. 7853 29835 01076 70338 85749
67	4. 2046 92619 39096 60596 700720	67	1. 8260 74802 70082 64341 49132
71	4. 2626 79877 04131 54213 294545	71	1. 8512 58348 71907 52860 92829
73	4. 2904 59441 14839 11290 921089	73	1. 8633 22860 12045 59010 74387
79	4. 3694 47852 46702 14941 729455	79	1. 8976 27091 29044 14279 94821
83	4. 4188 40607 79659 79234 754722	83	1. 9190 78092 37607 39038 32760
89	4. 4886 36369 73213 98383 178155	89	1. 9493 90006 64491 27847 23543
97	4. 5747 10978 50338 28221 167216	97	1. 9867 71734 [illegible]624 48517 84362
$\ln\pi$	1. 1447 29885 84940 01741 43427	$\log_{10}\pi$	(−1) 4. 9714 98726 94133 85435 12683
$\ln\sqrt{2\pi}$	(−1) 9. 1893 85332 04672 74178 03296	$\log_{10}e$	(−1) 4. 3429 44819 03251 82765 11289

n	$n \ln 10$	n	$n\pi$
1	2. 3025 85092 99404 56840 17991	1	3. 1415 92653 58979 32384 62643
2	4. 6051 70185 98809 13680 35983	2	6. 2831 85307 17958 64769 25287
3	6. 9077 55278 98213 70520 53974	3	9. 4247 77960 76937 97153 87930
4	9. 2103 40371 97618 27360 71966	4	(1) 1. 2566 37061 43591 72953 85057
5	(1) 1. 1512 92546 49702 28420 08996	5	(1) 1. 5707 96326 79489 66192 31322
6	(1) 1. 3815 51055 79642 74104 10795	6	(1) 1. 8849 55592 15387 59430 77586
7	(1) 1. 6118 09565 09583 19788 12594	7	(1) 2. 1991 14857 51285 52669 23850
8	(1) 1. 8420 68074 39523 65472 14393	8	(1) 2. 5132 74122 87183 45907 70115
9	(1) 2. 0723 26583 69464 11156 16192	9	(1) 2. 8274 33388 23081 39146 16379

n	π^n	n	π^{-n}
1	3. 1415 92653 58979 32384 62643	1	(−1) 3. 1830 98861 83790 67153 77675
2	9. 8696 04401 08935 86188 34491	2	(−1) 1. 0132 11836 42337 77144 38795
3	(1) 3. 1006 27668 02998 20175 47632	3	(−2) 3. 2251 53443 31994 89184 42205
4	(1) 9. 7409 09103 40024 37236 44033	4	(−2) 1. 0265 98225 46843 35189 15278
5	(2) 3. 0601 96847 85281 45326 27413	5	(−3) 3. 2677 63643 05338 54726 28250
6	(2) 9. 6138 91935 75304 43703 02194	6	(−3) 1. 0401 61473 29585 22960 89838
7	(3) 3. 0202 93227 77679 20675 14206	7	(−4) 3. 3109 36801 77566 76432 59528
8	(3) 9. 4885 31016 07057 40071 28576	8	(−4) 1. 0539 03916 53493 66633 17287
9	(4) 2. 9809 09933 34462 11666 50940	9	(−5) 3. 3546 80357 20886 91287 39854
10	(4) 9. 3648 04747 60830 20973 71669	10	(−5) 1. 0678 27922 68615 33662 04078



En 1973, Neil J.A. Sloane publie 200 pages de chiffres



361 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, 101, 104, 106
THE SUM OF 2 SQUARES. REF EUL (1) 1 417 11. KNAW 53 872 50.

362 1, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 14, 17, 18, 23, 24, 27, 30, 34, 35, 40, 41, 46, 49, 52, 53, 60, 62, 65, 68, 73, 74, 81, 82, 87, 90, 93, 96, 104, 105, 108, 111, 118, 119, 126, 127, 132, 137
A NUMBER-THEORETIC FUNCTION. REF DVSS 2 281 1884.

363 1, 2, 4, 5, 8, 10, 14, 15, 16, 21, 22, 25, 26, 28, 33, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 46, 48, 49, 50, 53, 57, 60, 62, 64, 65, 70, 77, 80, 81, 83, 85, 86, 90, 91, 92, 100
PRIME NUMBERS OF MEASUREMENT. REF PCPS 21 654 23.

364 1, 2, 4, 5, 8, 12, 19, 30, 48, 77, 124, 200, 323, 522, 844, 1365, 2208, 3572, 5779, 9350, 15128, 24477, 39604, 64080, 103683, 167762, 271444, 439205, 710648, 1149852
A(N) = A(N – 1) + A(N – 2) – 1. REF JA2 97.

365 1, 2, 4, 5, 10, 14, 17, 31, 41, 73, 80, 82, 116, 125, 145, 157, 172, 202, 224, 266, 289, 293, 463
15.2N – 1 IS PRIME. REF MTAC 23 874 69.**

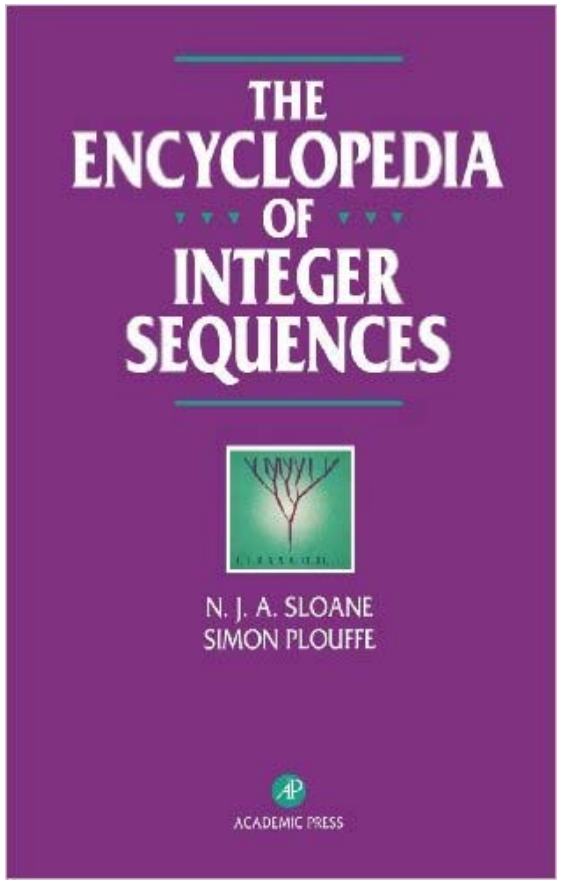
366 1, 2, 4, 5, 10, 19, 36, 68, 138
BORON TREES. REF CAY 9 451.

367 1, 2, 4, 5, 14, 14, 39, 42, 132, 132, 424, 429, 1428, 1430, 4848, 4862, 16796, 16796, 58739, 58786, 208012, 208012, 742768, 742900, 2674426, 2674440, 9694416
DISSECTIONS OF A POLYGON. REF GU1.

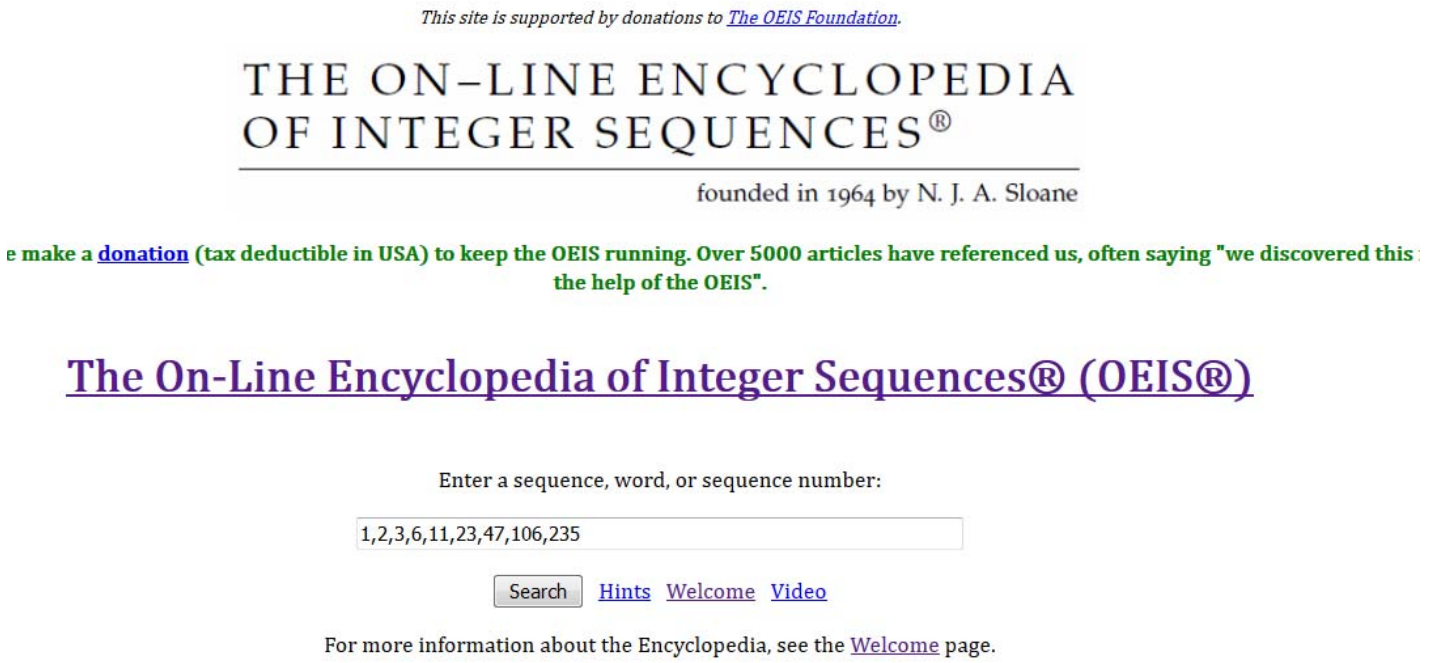
368 1, 2, 4, 6, 3, 10, 25, 12, 42, 8, 40, 202, 21
FROM SEDLACEKS PROBLEM ON SOLUTIONS OF X + Y = Z. REF GU8.

369 1, 2, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 22, 23, 25, 26, 27, 30, 36, 38, 42, 43, 44, 45, 50, 52, 54, 58, 59, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 78, 86, 87, 91, 102, 103, 106, 107, 108, 110, 116, 118, 119
ELLIPTIC CURVES. REF JRAM 212 25 63.

Et en 1995, avec 550 pages de chiffres



Le OEIS (1996), 2 personnes en 1995, 3000 en 2016 , 278000 suites de nombres



Mais en fait, toutes ces formules (et les tables qui viennent avec) sont toutes faites de la même façon.

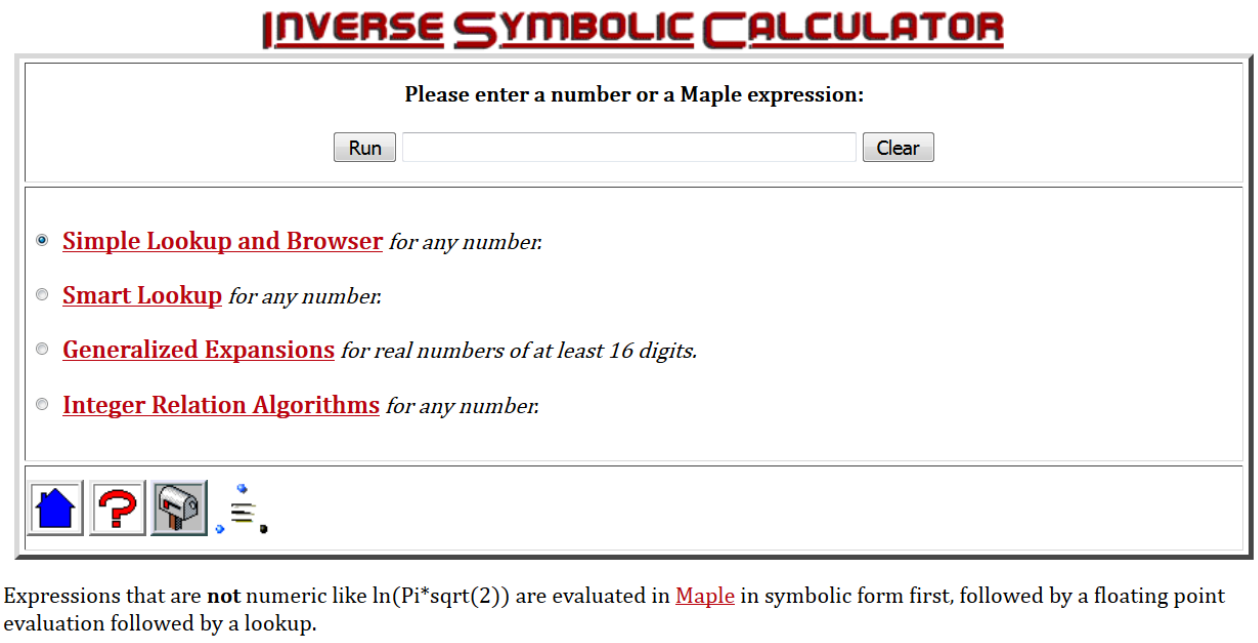
- D'une formule donnée on a une série de chiffres qui représentent ce que la fonction est à ce point.

$$\frac{\frac{lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2 log 7}{(2n)!\sqrt{n}}}{\int_0^\infty e^{-t^2}dt}}{\frac{\pi e}{[\int_0^\infty \frac{3dt}{t^6+1}][\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi t^2}dt]}} \frac{-e^{t\sum_{k=0}^\infty \frac{8\pi}{(4k+1)(4k+3)}}}{} = 50$$

- Il y a la formule à gauche -> résultat ou série de chiffres à droite.

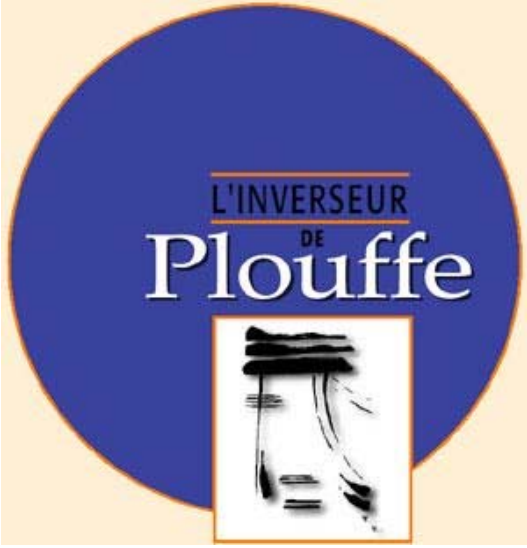
Mais si on pose la question : Comment faire pour aller de droite à gauche ?

Le Inverse Symbolic Calculator, Vancouver, juillet 1995 , 12 millions de constantes.



```
3141591706703055 = (0131) sum(1/(2*n^2-2*n+13),n=1..inf)
3141591746153406 = (0258) F(10/11,5/11;7/9,4/9;1)
3141591773236929 = (0261) 1+2*x-4*x^2+3*x^4+2*x^5
3141591936381883 = (0326) 11^(1/3)*(2^(2/3)-3)
3141592126650245 = (0131) sum(1/(37*n^2-30*n+67),n=1..inf)
3141592211352067 = (0001) Bernstein^GAM(1/12)-Pi
3141592227548461 = (0001) Pi-exp(-Pi)^Feig1
3141592434690729 = (0261) -5+5*x+2*x^2+4*x^3-5*x^4-2*x^5
3141592475846874 = (0001) Pi-sin(Pi/12)^GAM(1/12)
3141592628153719 = (0001) Pi-exp(-Pi)^GAM(1/6)
3141592639293414 = (0001) Pi-exp(-1/2*Pi)^GAM(1/12)
3141592653589793 = (0000) Pi
3141592653589793 = (0001) 1/2*GAM(1/6)*GAM(5/6)
3141592653589793 = (0001) GAM(1/4)/sr(2)*GAM(3/4)
3141592653589793 = (0001) GAM(1/6)*GAM(5/6)-Pi
3141592653589793 = (0001) cos(Pi/12)*GAM(5/12)*GAM(7/12)
3141592653589793 = (0001) exp(gamma)^(ln(Pi)/gamma)
3141592653589793 = (0001) sin(Pi/12)*GAM(11/12)*GAM(1/12)
3141592653589793 = (0141) Psi(1/4)-Psi(3/4)
3141592653589793 = (0396) A000796 from Enc. of Int. Seq.
3141592653589793 = (0397) sum(A007514(n)/(n-1)!) from E.I.S.
3141592653766556 = (0405) ln(Parking+Madelung)
3141592667886172 = (0001) Pi+exp(-1/2*Pi)^GAM(1/12)
3141592679025866 = (0001) Pi+exp(-Pi)^GAM(1/6)
3141592790518436 = (0001) exp(Pi)+Khint*GAM(7/24)
3141592831332712 = (0001) Pi+sin(Pi/12)^GAM(1/12)
3141592920353982 = (0399) 71/226
3141593079631124 = (0001) exp(-Pi)^Feig1+Pi
3141593095827519 = (0001) Pi+Bernstein^GAM(1/12)
3141593167750063 = (0008) sum((8/3*n^3-31/2*n^2+287/6*n-16)/n^n,n=1..inf)
3141593615816239 = (0011) sum((5/2*n^3-4*n^2+7/2*n+21)/(n!+2),n=1..inf)
3141593656148726 = (0001) Pi+exp(-Pi)^GAM(5/24)
3141593769945568 = (0001) Pi+GaussK^GAM(1/12)
```

1998, l'Inverseur de Plouffe
200 millions de constantes

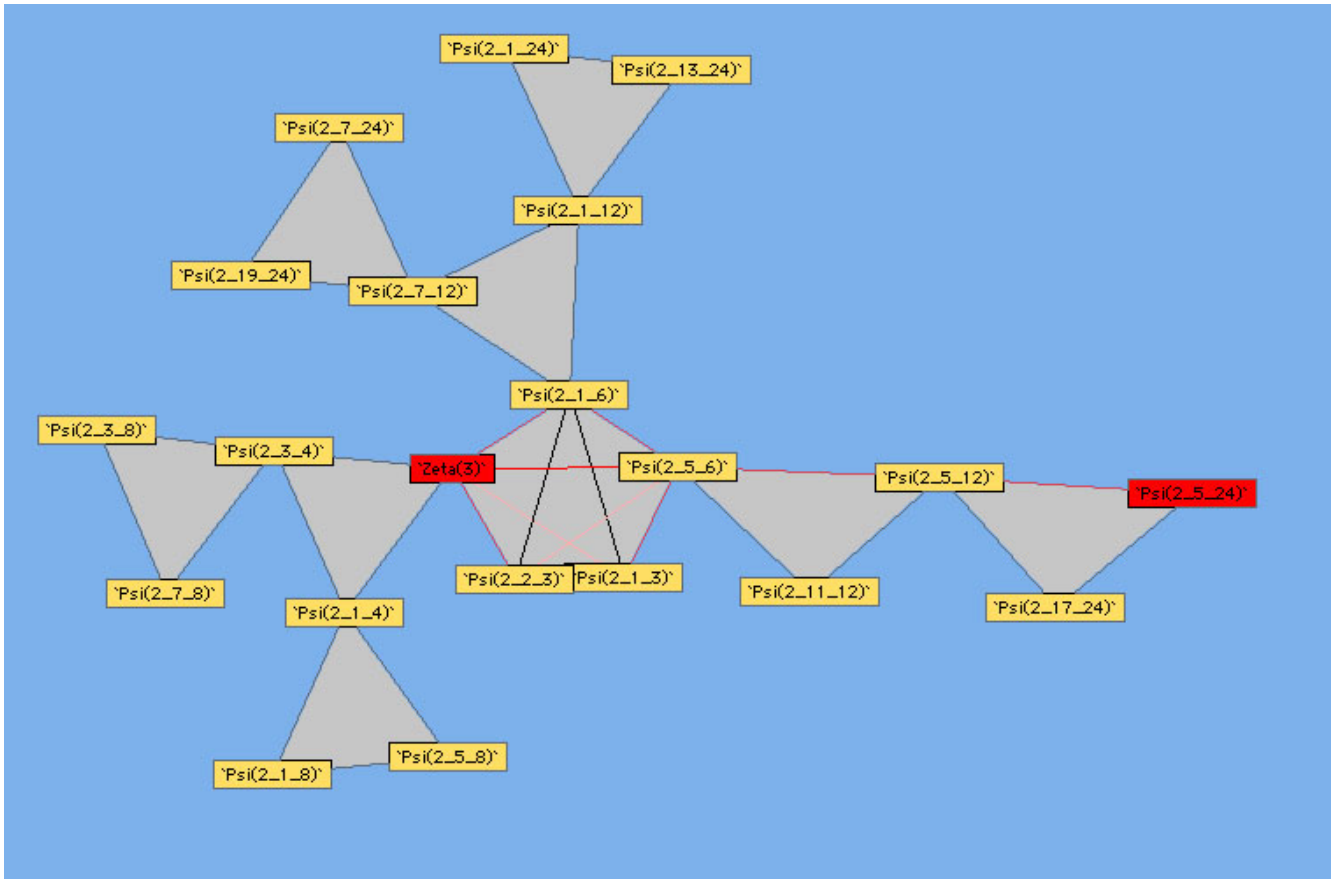


Copie en Australie 2001,
54 millions de constantes

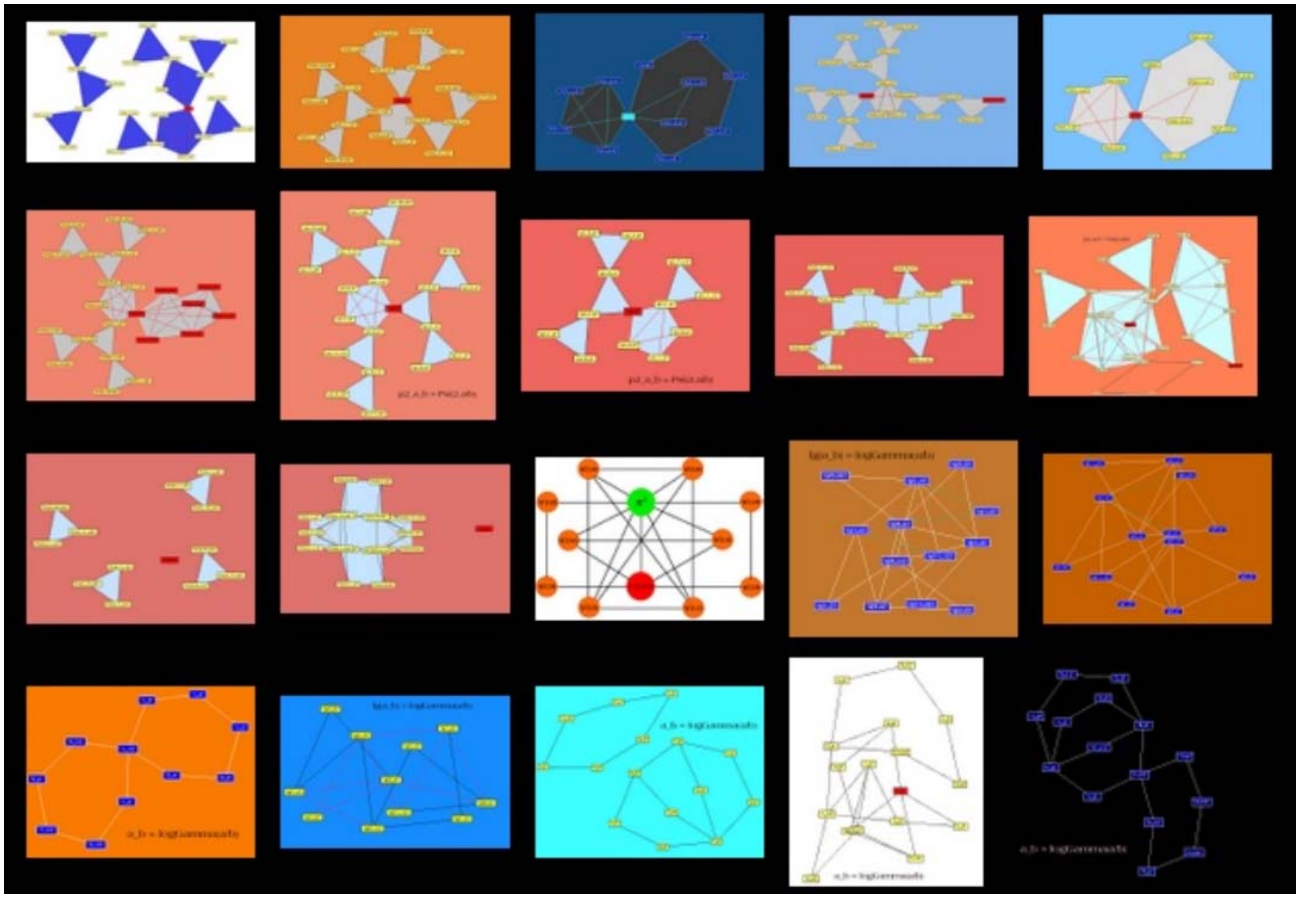
Inverseur de Plouffe (2016)

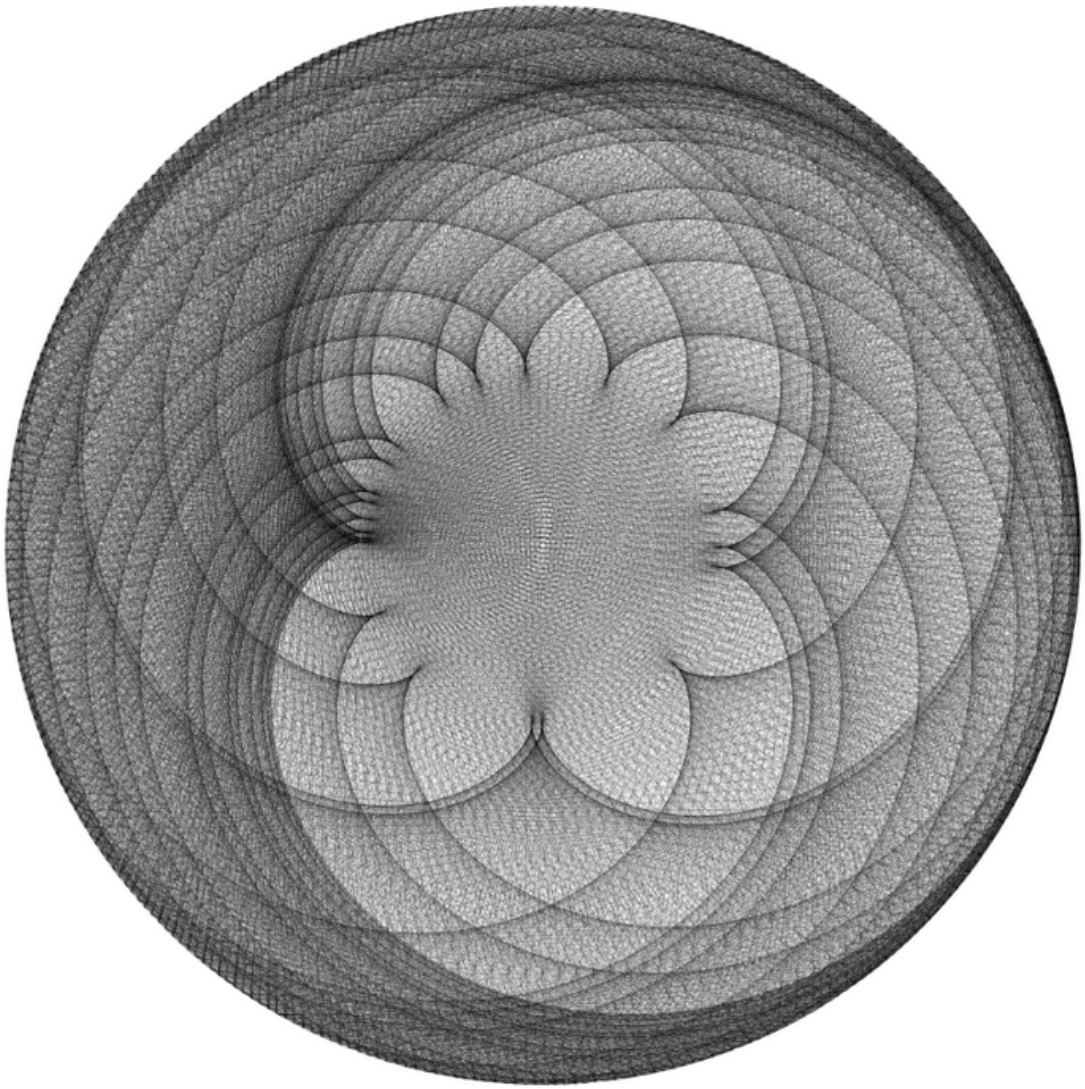
- 17,3 TB de chiffres (plusieurs inverseurs).
- 16 120 000 000 de constantes à 64 décimales
- 3,06 milliards de constantes à 32 décimales http://plouffe.fr/ip/
- Ça ressemble à ceci :

```
503200002574976749224822987191 35 a003 sin(Pi*23/66)/cos(Pi*51/115)
503200002831413259863754192725 60 s002 sum(A021891[n]/(binomial(2*n,n)*n^4*5^n),n=1..infinity)
503200002994574178292301770087 34 a015 Real Root of -x^16-x^15+x^14-x^12+x^11-x^9-x^7-x^6-x^5-x^4-x^3-x^2+x
503200004411405895752846470393 69 m001 (LambertW(1)-exp(1/Pi))/(-ErdosBorwein+ZetaQ(4))
503200004585349981086467487108 39 v021 sum(1/binomial(2*n,n)/(7/2*n^3-35/2*n^2+88*n-73),n=1..infinity)
503200005075607984230298056026 06 g005 GAMMA(1/11)*Pi*csc(1/10*Pi)/GAMMA(9/10)*GAMMA(3/7)/GAMMA(2/9)
503200005253496315573719926495 12 r009 Im(z^3+c),c=-1/52+29/46*I,n=48
503200005660943560038153887148 42 m020 7/3*exp(3*Pi)+91/2*exp(2*Pi)-791/6*exp(Pi)+92
503200006396254165545326000324 38 h028 log(hypergeom([1/2,5/8],[7/6,31/12,31/12],1/8))
503200006497937442710485526838 12 r009 Im(z^3+c),c=-1/4+20/33*I,n=22
503200007025463848452361015534 30 m018 95/2*Pi^2+55/2*Pi-52
503200007609413166878523726804 00 r009 Im(z^3+c),c=-13/42+31/50*I,n=23
503200008379435280414816327161 99 a007 Real Root Of 376*x^4-648*x^3-838*x^2-943*x-369
503200008385545775299464515496 54 m001 Backhouse*(BesselI(0,2)+Salem)
503200008754306269370679717943 18 r005 Im(z^2+c),c=-71/54+1/56*I,n=11
503200009099381806920690586379 98 r008 a(0)=5,K{-n^6,-87-31*n^3+38*n^2+48*n}
503200010193364094937098212482 44 s002 sum(A221554[n]/(binomial(2*n,n)*n^4*5^n),n=1..infinity)
503200011256121292643065920504 86 h028 log(hypergeom([1/10,1/8],[17/10,19/8,31/12],5/12))
503200011671597124738101651270 33 m021 17/3/Pi^3+6/Pi^2-26/3/Pi+7
503200012731732081031385981655 76 m001 Zeta(1,2)^2*Riemann2ndZero^2*exp(sin(Pi/12))
```

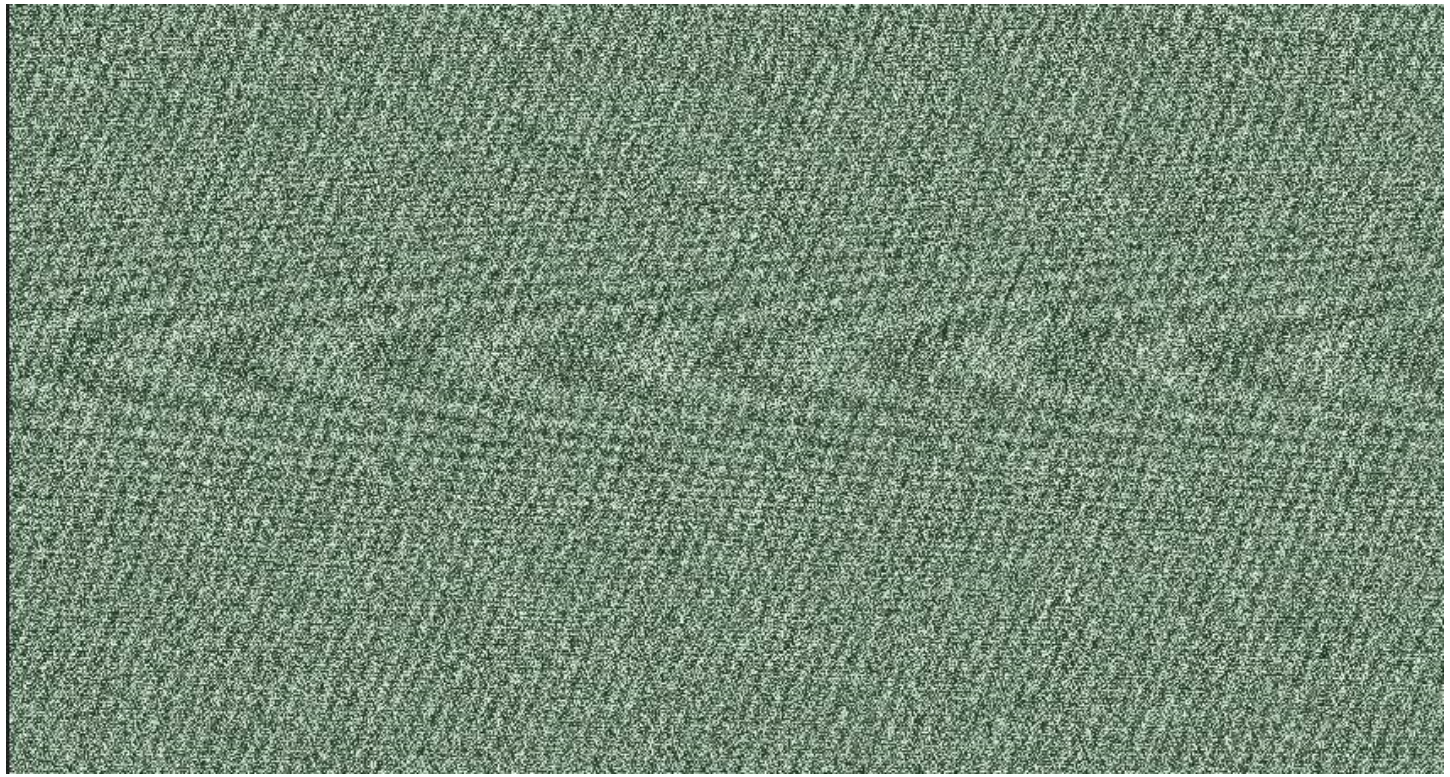

`Psi(2_1_24)`
`Psi(2_13_24)`
`Psi(2_7_24)`
`Psi(2_1_12)`
`Psi(2_19_24)`
`Psi(2_7_12)`
`Psi(2_1_6)`
`Psi(2_3_8)`
`Psi(2_3_4)`
`Zeta(3)`
`Psi(2_5_6)`
`Psi(2_5_12)`
`Psi(2_5_24)`
`Psi(2_7_8)`
`Psi(2_2_3)`
`Psi(2_1_3)`
`Psi(2_11_12)`
`Psi(2_17_24)`
`Psi(2_1_4)`
`Psi(2_1_8)`
`Psi(2_5_8)`

Et ça sert à trouver ça





Zéros de la fonction Zeta



Des formules (?) pour les masses des particules élémentaires.

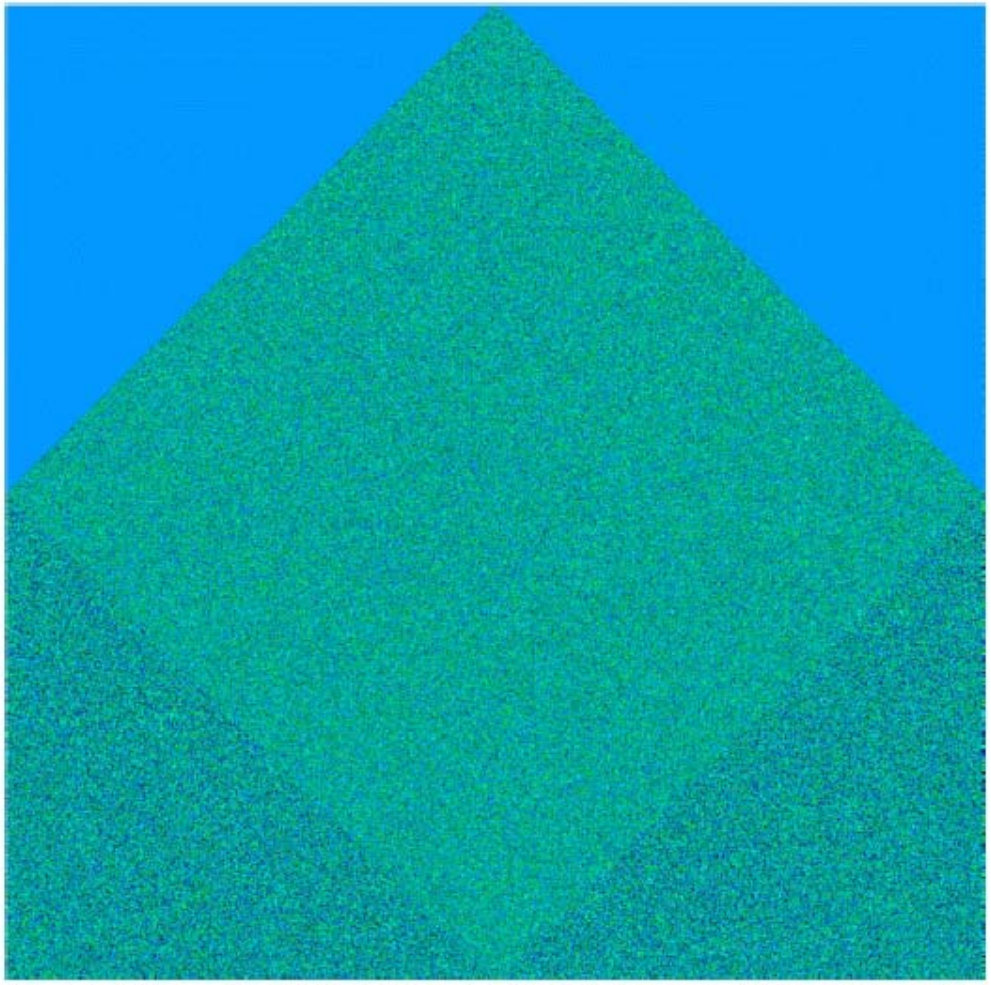
A formula for the proton/electron mass ratio:

$$\frac{1}{5\cosh(\pi)} + 6\,\pi^5 + \frac{1}{5\sinh(\pi)} = 1836.15267996686153\ldots$$

$$\frac{M_n}{M_p} \approx \frac{8}{27}\left(\frac{5}{\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)} - \sqrt{3}\right) = 1.00137841977963528\ldots$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{1}{8}\left(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{6(5+\sqrt{5})}\right)$$

Nombre algébrique à 270 millions de décimales (en binaire) particulier



$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}\cdots}}}}$$

Ou d’autres particulières

1992 : $e^{\pi} - \pi = 19.999099979\ldots$

1995 : $\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{2\pi n/7} - 1} = 10.000000000000000190161767888663\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{2\pi n/13} - 1} \cong 119.000000000000000000000000000000959374585\ldots$$

$$\pi = 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{\pi n}-1)} - 96\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{2\pi n}-1)} + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{4\pi n}-1)}$$

$$\frac{1}{\pi} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{\pi n}-1} - 40\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1} + 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{4\pi n}-1}$$

$$\zeta(5) = \frac{694}{204813}\pi^5 - \frac{6280}{3251}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{4\pi n}-1)} + \frac{296}{3251}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{5\pi n}-1)} - \frac{1073}{6502}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{10\pi n}-1)} + \frac{37}{6502}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{20\pi n}-1)}$$

$$\zeta(5) = \frac{11\pi^5\sqrt{3}}{5670} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{3}\pi n}-1)} - \frac{33}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{12}\pi n}-1)} + \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{48}\pi n}-1)}$$

$$\zeta(3) = \frac{13\pi^3\sqrt{3}}{45} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{\sqrt{3}\pi n}-1)} - \frac{9}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{2\sqrt{3}\pi n}-1)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{4\sqrt{3}\pi n}-1)}$$

$$\zeta(5) = \frac{5\pi^5\sqrt{7}}{3906} + \frac{64}{31}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{7}\pi n}-1)} + \frac{130}{31}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{28}\pi n}-1)} - \frac{4}{31}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\sqrt{112}\pi n}-1)}$$