Le calcul de certains nombres avec la règle et le compas

Simon Plouffe
LaCIM
Université du Québec à Montréal
12 février 1998

• • •

Introduction

Le calcul de x en binaire

Le cercle unité

La constante arctan(1/2)/Pi et une récurrence

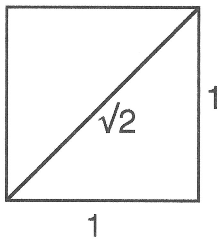
La construction

Le calcul des rationnels et les réflexions de la lumière dans une tasse à café

• • •

Que peut-on calculer avec la règle et le compas ?

On sait qu'on peut construire $\sqrt{2}$ facilement...



Mathématiquement, le problème est *résolu*.
Oui, mais..., cette construction est d'une certaine façon abstraite, on a bien un segment de longueur √2 mais quelle est la valeur de √2 au juste ?
C'est facile c'est 1.414213562373095....(!)
Cette valeur ne vient pas de la construction géométrique comme tel, elle est obtenue avec un calcul analytique. On le sait le nombre est irrationnel (la preuve est assez connue).

Ce fait a causé une véritable crise au sein de l'école de Pythagore, on s'est aperçu que les beaux nombres rationnels n'avaient rien avoir avec certaines constructions. Il a fallu attendre l'avènement du calcul différentiel pour vraiment avoir une idée de la valeur décimale proprement dite. Aussi avec le développement des procédés de calcul (séries et produits infinis). De là, l'intérêt pour les constuctions géométriques ingénieuses s'est quelque peu estompé. Il y a eu un certain regain lors de la découverte de procédés mécaniques et analogiques (analyseur différentiels). Aujourd'hui , de parler de calcul avec la règle et le compas semble complètement rétrograde(!) Nous allons voir que non.

Le calcul de x en binaire

Algorithme pour développer x en base k (entre 0 et 1).

base k

$$y_n = \left[k x_n\right] \text{ and } x_{n+1} = \left\{k x_n\right\}$$

Ici k=2.

Voici d'ailleurs quelques autres algorithmes...
X_0 est la valeur de départ.

Infinite product ($x_0 > 1$)

$$y_n = 1 + \left[\frac{1}{x_n}\right] \text{ and } x_{n+1} = \left\{x_n y_n\right\}$$

•••

Infinite product ($x_0 < 1$)

$$y_n = 1 + \left[\frac{1}{|x_n - 1|}\right] \text{ and } x_{n+1} = \left\{\frac{x_n(y_n - 1)}{y_n}\right\}$$

•••

Factorial base

$$y_n = \left[x_n n!\right] \text{ and } x_{n+1} = \left\{x_n n!\right\}$$

base k^2

$$y_n = \left[x_n n^2\right] \text{ and } x_{n+1} = \left\{x_n n^2\right\}$$

•••

Egyptian product

$$y_n = 1 + \left[\frac{1}{x_n}\right] \text{ and } x_{n+1} = \left\{x_n y_n\right\}$$

•••

Continued fraction

$$y_n = \left[\frac{1}{x_n}\right] \text{ and } x_{n+1} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$$

•••

Order k egyptian fraction

$$y_n = \left[\left(\frac{1}{x_n}\right)^k\right] \text{ anàd } x_{n+1} = x_n - \frac{1}{y_n^k}$$

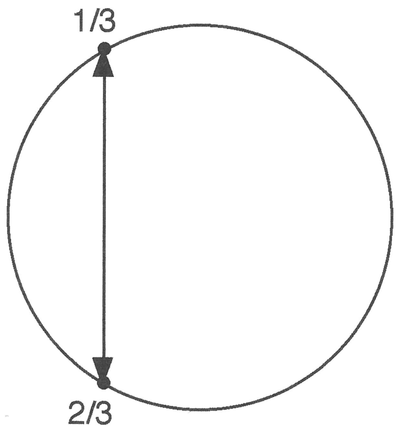
etc etc...

En français : pour la base 2 : on multiplie par 2 et quand x > 1 on a 1 et quand x < 1 on a 0. On prend la partie fractionnaire à chaque étape.

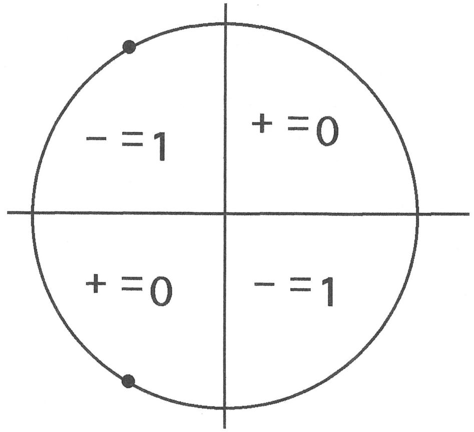
Le cercle unité

On peut représenter graphiquement ce calcul sur le cercle unité, on pose que x est dans [0,1] et x-> exp(2πix).

Donc pour 1/3 développé en base 2 ça donne : 0.010101...et sur le cercle unité (de rayon 1) on a :



On prend la règle suivante : si le **signe de l'angle** est + alors on a 0 et si le **signe de l'angle** est - on a 1. (important). Aussi important : c'est la **longueur d'arc** par rapport a 2π qui est considérée et non pas les coordonnées cartésiennes. Donc 1/3 est en fait 2π/3 comme longueur d'arc et 2/3 est 4π/3.



Ça marche bien et c'est *naturel* comme représentation, nous le verrons plus loin...

Une question tout aussi naturelle est de se demander quels sont les rationnels (longueur d'arc) qui sont calculables de cette façon.

La réponse est : p/q (avec p<q) est représentable si q est un **produit de nombres de Fermat premiers et distincts**.

Un nombre de Fermat est de la forme $2^{(2^n)} + 1$ comme 2,3,5,17,257 et 65537. Malheureusement 65537 est le plus grand connu(!).

Après les travaux de Gauss, un fou s'est mis à construire le polygone régulier à 65537 côtés, il a pris 10 ans pour y arriver. (Martin Gardner, nouveaux divertissements mathématiques).

La constante arctan(1/2)/Pi et une récurrence

Voici ce qui se passa vers 1983...

Le n'ième bit de $1/\pi$ est déterminé par le signe de l'angle de $\sin(2^n)$. C'est intéressant ça, non?

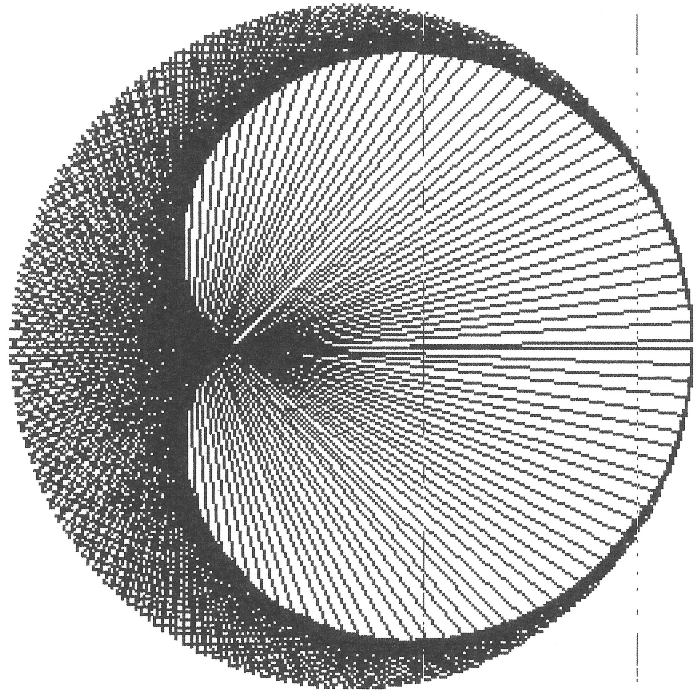
Il y a une attrappe, il faut nécessairement choisir une valeur de départ, ici on a donc le sin(1). Donc pour déterminer le n'ième bit de $1/\pi$ on a qu'à connaître sin(1) avec assez de précision. Mais voilà : sin(1) est un nombre transcendant. Oui, puisque les coordonnées de sin(1) sont en fait la partie imaginaire de exp(i). Son angle est 57.2957795131 degrés et ce nombre est $180/\pi$ en fait.

C'est facheux...

On ne peut pas construire sin(1) avec la règle et le compas puisque sin(1) est transcendant, ici notre longueur d'arc serait de $1/\pi$. Le problème est circulaire!

Mais si on prend un bon café et qu'on réfléchisse un peu, on voit ceci...

développement de 1/181 en base 2 et aussi ce qu'on voit dans une tasse à café...



La période de 1/181 en base 2 est de 180.

Cette courbe est un cardioide c'est l'enveloppe des droites reliées entre elles, c'est aussi la caustique d'un point sur le cercle. Voir + de détails à http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Curves/Cardioid.html

L'étude des courbes obtenues de cette façon est intéressante en soi,
voir http://www.lacim.uqam.ca/plouffe

Pour doubler un angle X_0 sur le cercle on prend la formule suivante.

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 - x_n^2}$$

Après quelques réflexions, (je me suis aperçu), que si on prend la valeur $X_0 = 1/2$ et qu'on itère cette récurrence, on obtient {1/2, 4/3, -24/7, ...}. Ça grossit assez rapidement mais les valeurs (le signe) change souvent et de façon apparemment imprévisible.

Alors on construit le nombre binaire correspondant, pour voir ce que ça pourrait bien donner....? en posant que f(x) est la fonction signe définie plus haut.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(x_i)}{2^i} = 0.1475836...$$

Mais quel est ce nombre ?, logiquement la réponse est arctan(1/2)/Pi, mais ce n'est pas du tout de cette façon que le nombre a été trouvé.
Voir http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC.

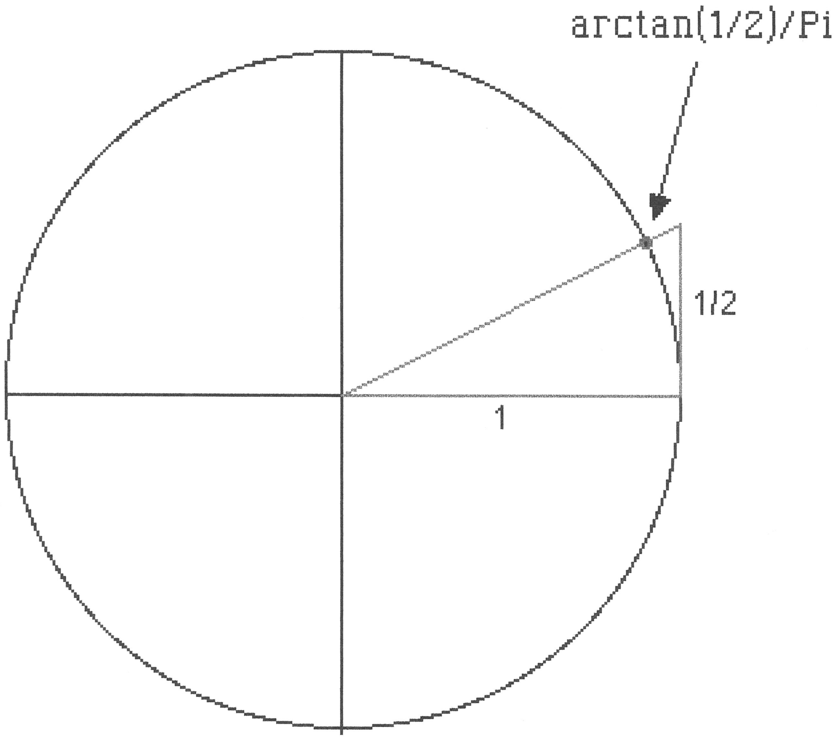
Ce nombre arctan(1/2)/π est inconnu..., on ne sait pas si c'est irrationnel seulement.

Exercice : on connait la formule d'Euler

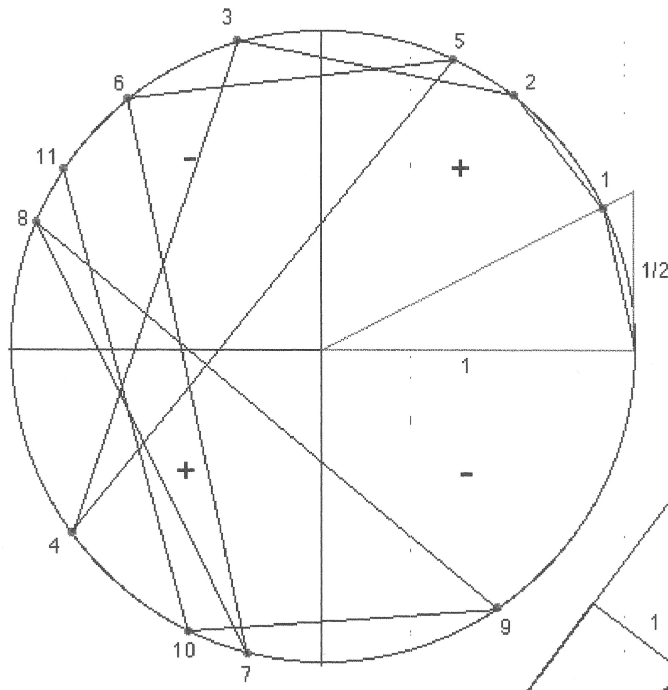
$$\arctan(\tfrac{1}{2}) + \arctan(\tfrac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$$

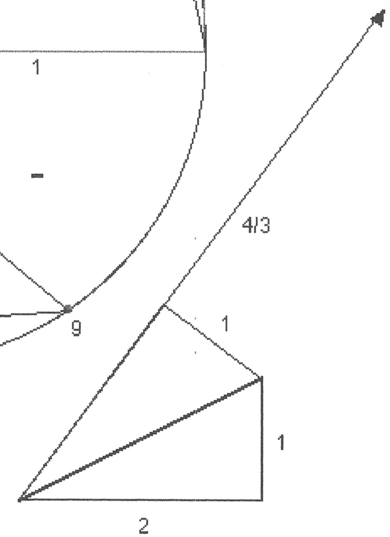
Et on sait que π est transcendant (donc irrationnel), peut-on en conclure que arctan(1/2)/π est aussi forcément irrationnel ? *la réponse est pas si simple...*

La construction



arctan(1/2)/Pi in base 2 is 0.0010010111001000...
so the signs are ++-++-+---++-+++...





The bit is 0 if the sign is +
and the bit is 1 if the sign is -.

et après quelques étapes...

Ceci soulève d'intéressantes questions.

Peut-on trouver une construction qui donne $\sqrt{2}$?

Étant donné que seulement le premier quadrant est véritablement nécessaire, peut-on rafiner la construction pour avoir une précision plus grande ?

Y-a t-il des nombres plus simples ?

Pi est un log, et la fonction arctan est aussi un log...

$\pi = \log(-1)/i$ et $\arctan(1/2) = 1/2*I*\ln(2-I)-1/2*I*\ln(2+I)$ donc on peut construire des nombres qui sont des rapports de logarithme. Peut-on étendre à plus vaste ?

Est-ce que $\arctan(1/2)/\pi$ est l'exemple le plus simple ?

Y-a t-il un bit pattern dans le développement binaire de cette constante ? En d'autres mots, est-ce que le développement binaire est en fait une règle de construction ? Voir **A004715** du serveur de suites.

Les coordonnées cartésiennes de cette constante sont $2\sqrt{5}/5$ et $1/\sqrt{5}$, donc peut-on combiner plusieurs constructions du même genre pour avoir $\sqrt{2}$?

On peut étendre à plus vaste, oui.

La formule d'addition d'angle de arctan est reliée au cercle et cette propriété est aussi partagée par l'ellipse.

Donc si on construit l'équivalent exact de $\arctan(1/2)/\pi$ sur une ellipse disons avec a=1 et b=2, on pourrait calculer la constante correspondante en binaire.