L'intelligence des primates défie l'homme

La Recherche

La Recherche

www.larecherche.fr

Résistance aux antibiotiques

Face à l'émergence des super-bactéries la riposte des chercheurs

M 01108 - 515S - F: 6,40 € - RD

SEPTEMBRE 2016

DOM 7,40 € - BEL 7,40 € - LUX 7,40 € - ALL 8,20 € - ESP 7,40 € - GR 7,40 € - ITA 7,40 € - PORT.CONT 7,40 € - CAN 10,5 $ CAN
CH 12,40 FS - MAR 63 DH - TUN 6,50 TND - MAYOTTE 8,80 € - TOM SURFACE 970 XPF - TOM AVION 1620 XPF

Mathématiques

Une vie à écrire des formules

Le destin prodigieux et fugace de Srinivasa Ramanujan, mathématicien indien disparu voici près d'un siècle, fait l'objet d'un long-métrage. La totalité de ses travaux a maintenant été éditée. Beaucoup ont donné lieu à des prolongements remarquables et très actuels.

Philippe Pajot, journaliste

D'où viennent les inspirations mathématiques des grands savants ? De visions, disent-ils parfois, dont l'origine semble échapper à la compréhension. Nul ne personnifie sans doute mieux ces éclairs de génie que l'Indien Srinivasa Ramanujan (1887-1920). Le film britannique *The Man Who Knew Infinity* qui sort en France cet automne relate l'intimité qu'il a pu entretenir avec les mathématiques et avec les nombres en particulier. Les formules souvent mystérieuses élaborées par ce mathématicien autodidacte résonnent encore aujourd'hui et nourrissent une recherche mathématique très active. Ramanujan n'a que 13 ans lorsqu'il entreprend ses premiers travaux sur les sommes géométriques et sur les séries arithmétiques. Deux ans plus tard, après qu'on lui a montré comment résoudre les équations cubiques (de la forme $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$), il trouve sa propre méthode pour résoudre les équations du quatrième degré (avec un terme en x^4 en plus), mais échoue à trouver les solutions de celles du cinquième degré, ignorant que leur résolution n'est pas possible dans le cas général – ce qui avait été démontré en 1824 par Paolo Ruffini et Niels Abel.

L'une des rares photographies de Srinivasa Ramanujan (1887-1920).

À la même époque, il découvre un livre rempli de formules mathématiques. Écrit par G.S. Carr, l'ouvrage contient les résultats nécessaires au curriculum des Britanniques qui souhaitent passer le concours d'entrée des universités. En le lisant, il approfondit les mathématiques et retrouve les formules par lui-même. Grisé par ses résultats et sa facilité, il entreprend de se consacrer à cette discipline. Comme il délaisse les autres matières, il échoue aux examens, ce qui l'empêche d'intégrer l'université de Madras. Malgré cet échec, il poursuit ses recherches, mais dans des conditions matérielles difficiles. À cette époque, il travaille sur les fractions continues (des fractions qui se poursuivent de manière infinie), sur les séries divergentes et sur les nombres de Bernouilli (suite de nombres rationnels) notamment. En 1911, il publie ses premiers résultats et des problèmes dans le *Journal of the Indian Mathematical Society*. La particularité de ces publications ? Ramanujan enchaîne les formules sans une once d'explication. Et c'est bien là l'originalité de ce mathématicien hors-norme. *« Ramanujan est le héros de la formule »*, s'amuse le mathématicien Bernard Randé, qui lui a consacré un livre (1).

Une formule mathématique est un objet qui condense un certain nombre de résultats dans une seule égalité. Sans explications, les clés manquent pour que d'autres personnes comprennent le travail du

INTERFOTO / LA COLLECTION - COLLECTION CHRISTOPHEL

mathématicien. L'effort à faire pour pénétrer le sens de l'égalité qu'on a devant les yeux est alors considérable. Lancées à la figure du lecteur tels des défis mystiques ou magiques, ces formules intriguent.

ZÉRO DÉMONSTRATION

De multiples raisons concourent à cette absence d'explication. D'abord, c'est par des formules que Ramanujan s'est initié aux mathématiques. Le livre de Carr grâce auquel il a appris les mathématiques comprend 4448 propositions mathématiques. Un livre de formules, écrites à la suite les unes des autres et entièrement dépourvues de démonstrations. Nul doute que ce condensé du savoir mathématique a eu une influence considérable sur Ramanujan et sur sa manière de faire des mathématiques. «*Pour moi,* estime Bernard Randé, *la pensée de Ramanujan est le reflet d'une pensée jacobienne typique du XIXe siècle, à savoir des calculs formels qui conduisent à des résultats profonds. On manipule des objets que l'on transpose constamment, qu'il s'agisse de séries génératrices, de fonctions holomorphes, de suites d'entiers, de propriétés arithmétiques. Et le plus souvent, ces manipulations, ces transpositions ne sont pas explicitées.* »

Autre raison à l'aridité des formules de Ramanujan: il appartenait à la caste brahmane vishnouite, caste de prêtres. « *En tant que brahmane, la verbalisation de ses résultats, sa manière d'y arriver, n'était probablement pas nécessaire, ni même souhaitable,* estime Bernard Randé. *Son appartenance à la caste de prêtres a été importante pour la constitution d'un esprit relativement secret qui n'explicite pas.* »

Enfin, les aspects pratiques liés à la pauvreté de sa famille ont également contribué à cette concision. Ainsi, le papier était rare chez lui, de sorte qu'il écrivait peu, ou alors sur son ardoise qu'il emportait partout tel un palimpseste utilisable à l'infini. Quand il lui arrivait de disposer de papier, il écrivait une fois d'une certaine couleur, puis une deuxième fois sur la même feuille à l'aide d'une autre couleur, entrelaçant les •••

▲ *Le film britannique retraçant la collaboration de Srinivasa Ramanujan, interprété par Dev Patel (photo), et Godfrey Hardy, interprété par Jeremy Irons, sort cet automne en France.*

Repères

- Autodidacte, l'Indien Srinivasa Ramanujan est considéré comme un prodige des mathématiques.
- Ses intuitions ont donné lieu à la formulation de milliers de résultats mathématiques.
- Sa rencontre improbable en 1913 avec le Britannique Godfrey Hardy a débouché sur une collaboration courte mais fructueuse.

••• formules pour économiser la place. Tous ces aspects ont sans doute forgé sa manière très particulière d'aborder les mathématiques.

En 1911, il a 24 ans et toujours pas de diplôme. Par l'entremise de mathématiciens indiens impressionnés par ses publications, il sollicite et obtient un premier travail temporaire d'employé de bureau à Madras, puis un travail permanent dans les bureaux des autorités du port de Madras. Mais il continue à passer son temps libre à faire des mathématiques. N'arrivant pas à faire reconnaître la valeur de son travail et sans véritable interlocuteur, il se sent incompris et frustré. C'est alors qu'il décide d'écrire en Angleterre à deux mathématiciens.

D'abord à Fellow de la Royal Society, sans obtenir de réponse. Mais Srinivasa Ramanujan ne se décourage pas. En 1913, il reprend la plume pour solliciter celui que l'on considère alors comme l'un des plus grands spécialistes de la théorie des nombres : Godfrey Hardy. Installé à Cambridge, Hardy est à 35 ans l'un des prodiges des mathématiques britanniques : avec déjà trois livres et une centaine d'articles publiés, il est bien installé dans sa carrière et a constitué une école autour de lui. En toute candeur, Ramanujan lui écrit qu'il n'a pas de diplôme de mathématiques, qu'il a appris par lui-même, et il accompagne sa missive de résultats sur les séries divergentes que les mathématiciens indiens jugent « surprenants ». Sitôt après l'avoir reçue, fin janvier 1913, Hardy consulte son confrère John Littlewood sur cette lettre qui le rend perplexe. Face à ces pages remplies de formules, il ne sait pas quoi penser. Canular ou génie ? En étudiant ces pages, il se convainc qu'il y a là quelque chose de très sérieux. Hardy répond à Ramanujan pour l'encourager, puis l'invite à Cambridge. Son but ? Le confronter à l'épreuve de la rigueur moderne afin que ses immenses talents soient mis au service de la science tout entière.

UNE ALLIANCE IMPROBABLE

Nuls ne sont plus différents qu'Hardy et Ramanujan : le Britannique de bonne éducation est passé par les meilleures écoles, il est rigoureux et athée ; le brahmane indien, dévot, estime que les mathématiques consistent à écrire *« les pensées de Dieu »*. Malgré la tension qui va exister entre les deux hommes, cette alliance improbable va donner une fantastique collaboration. Lorsqu'à la fin de sa carrière, on interrogera Godfrey Hardy sur sa plus grande réalisation scientifique, il répondra sans hésiter : *« la découverte de Ramanujan »*.

Srinivasa Ramanujan passe cinq ans en Angleterre, presque de manière concomitante avec la Première Guerre mondiale. Durant ce temps, Hardy tente de lui inculquer – avec peu de succès – la rigueur des démonstrations. Cela aboutit tout de même à une vingtaine d'articles publiés où les démonstrations sont bel et bien présentes. L'un des points d'orgue de ce travail commun concerne les nombres de partitions de l'entier naturel n, notés $p(n)$. Prenons le nombre 4. Combien de façons différentes peut-on l'écrire à l'aide d'additions ? Un calcul

UN SIÈCLE DE DÉCRYPTAGE DES CARNETS DE RAMANUJAN

1920 Peu après la mort de Ramanujan, Godfrey Hardy plaide pour l'édition des trois carnets écrits entre 1903 et 1914. Le but ? Produire des références précises, fournir une preuve et, pour les résultats faux, chercher s'il n'y a pas un résultat correct pas loin. Jusqu'à sa mort, Hardy produira une vingtaine d'articles inspirés des carnets.

1929-1947 Les Britanniques George Neville Watson (photo) et Bertram Martin Wilson commencent l'édition des carnets. Le chantier est considérable et les deux hommes décèdent avant de l'avoir terminé. Les carnets dorment alors à la bibliothèque du Trinity College, à Cambridge.

1976 L'Américain George Andrews visite Trinity College, en Irlande, pour consulter les notes de George Neville Watson. Il retrouve notamment 138 pages manuscrites de Ramanujan écrites à son retour en Inde en 1920, qu'on baptisera le « carnet perdu ». Il publie quelques travaux.

1978-2016 L'Américain Bruce Berndt entreprend un travail systématique d'édition des carnets. Cinq livres sont publiés sur les trois premiers carnets et quatre livres sur le carnet perdu ; le cinquième et dernier volume est attendu pour cette année. Cette édition représente au total plus de 3000 pages de mathématiques.

élémentaire nous amène à 5 ($4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$). On dit que le nombre de partitions de 4 est égal à 5 (ou $p(4) = 5$) (voir illustration ci-contre). Qu'en est-il pour les autres entiers ? On peut calculer avec un peu de travail de décomposition que $p(10) = 42$ ou que $p(50) = 204\,226$. Hardy et Ramanujan publieront une approximation asymptotique de ce nombre, c'est-à-dire une approximation valide pour de très grands entiers (voir formule ci-dessous). Grâce à cette formule, pour $n = 1\,000$ par exemple, on obtient une approximation du nombre de façons de décomposer 1 000 qui ne diffère que de 1,4 % de la valeur exacte.

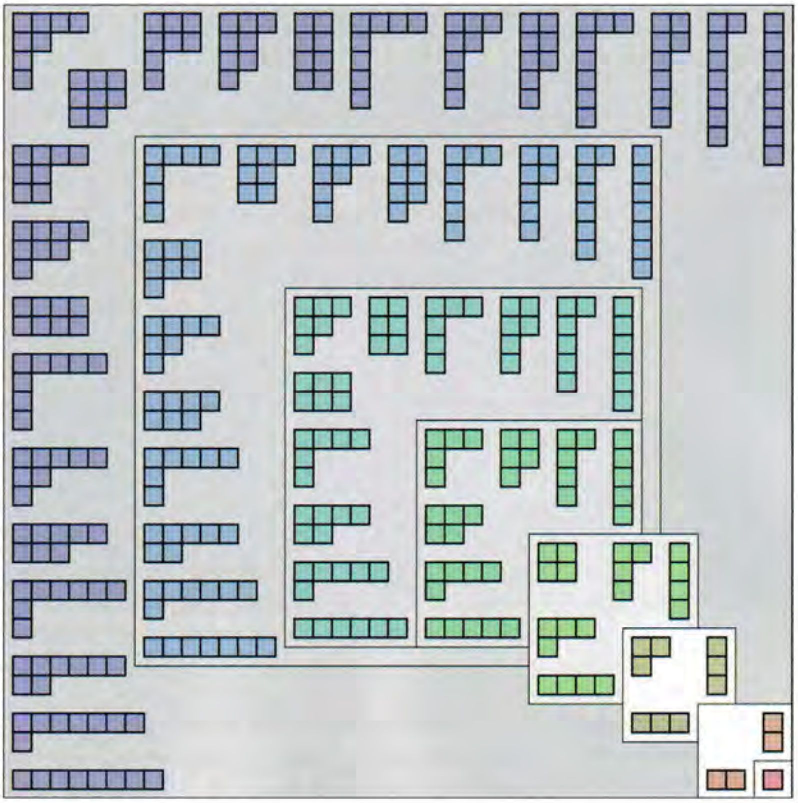
DES PROCÉDÉS « MIRACULEUX »

Une anecdote à propos de ce travail illustre l'étonnante intuition de Ramanujan. Poursuivant sur leur lancée, le duo de mathématiciens fournit ensuite un développement asymptotique (*) de cette approximation qui, comme l'approximation elle-même, varie en exponentiel de racine carré de n. Ramanujan dit alors, sans le justifier, qu'il préfère enlever 1/24 à n, autrement dit qu'il préfère utiliser la formule $\exp[(n - 1/24)^{1/2}]$. Pourquoi 1/24 ? Nul ne le sait. Toujours est-il que, ce faisant, Hardy s'aperçoit que le développement est meilleur : on se rapproche plus vite de la valeur exacte (la convergence est plus rapide). Lorsqu'en 1937, le mathématicien allemand Hans Rademacher, s'inspirant des travaux de Hardy et Ramanujan, trouvera le développement en série exacte du nombre de partition de n, il y a aura toujours le 1/24 dans les formules...

De constitution fragile, Ramanujan s'adapte mal à la vie anglaise dont le climat et la nourriture ne lui conviennent pas. Il a beaucoup de difficultés à suivre son régime végétarien. Sa santé décline, son moral aussi. L'Inde est loin, et les lettres de sa famille et de ses amis ne parviennent pas à le réconforter. En 1917, il fait même une tentative de suicide, se jetant sur les rails du métro. Il s'en tire avec des fractures. Malgré les succès mathématiques – Ramanujan est élu à la Royal Society en 1918 –, malgré le soutien indéfectible de Hardy, il rentre en Inde en 1919. Mais sa santé ne s'améliore pas et il décède l'année suivante à l'âge de 32 ans, peut-être d'une amibiase hépatique.

Que reste-t-il de ses travaux ? Plusieurs mathématiciens, dont Hardy, se sont attelés à l'analyse et à l'édition de l'œuvre considérable de Ramanujan, comprenant publications et carnets, notamment un carnet « perdu » écrit après son retour d'Angleterre et retrouvé en 1976 (lire p. 62). En tout, on y dénombre 3 254 résultats. Parmi eux, moins de dix sont faux et les deux tiers sont originaux.

Outre les résultats sur le nombre de partitions, beaucoup concernent les approximations et les développements en fractions continues. Par exemple, il a fourni de nombreuses approximations du nombre π ou d'autres nombres par des séries ou des procédés si rapidement convergents que les mathématiciens les jugent *« miraculeux »*. C'est ce qu'on appelle aujourd'hui l'accélération de la convergence, très utile en calcul numérique. Simon Plouffe, spécialiste de π et enseignant à l'IUT de Nantes, s'est beaucoup inspiré des •••



$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

▲ *Cette formule est une approximation du nombre de manières de décomposer l'entier n en sommes d'entiers. Cette décomposition est illustrée ci-dessus par un diagramme (ici pour les nombres entiers de 1 à 8).*

(*) **Un développement asymptomatique d'une fonction** est une somme finie de termes qui donne une bonne approximation de la fonction.

••• formules de Ramanujan (voir ci-dessous) pour donner des approximations numériques de π, ainsi que des approximations par des séries qui convergent plus rapidement. L'une des formules les plus rapidement convergentes et grâce à laquelle on a calculé le plus grand nombre de décimales de π, est grandement inspirée de formules analogues dues à Ramanujan. Elle a été découverte en 1987 par les Américains David et Gregory Chudnovsky.

Manjul Bhargava, mathématicien indien qui a reçu la médaille Fields en 2014, souligne l'influence de son illustre prédécesseur sur son propre travail sur les formes quadratiques. Il s'agit de formules du type $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Un théorème dû à Lagrange (1770) dit que cette forme prend toutes les valeurs entières positives possibles. Ramanujan s'est demandé s'il pouvait trouver d'autres formes quadratiques de ce type qui prendraient également toutes les valeurs entières. « *Les techniques qu'il a mises au point pour répondre à ces questions m'ont permis de résoudre entièrement ce problème, avec Jonathan Hanke* », explique Manjul Bhargava.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9\,801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1\,103+26\,390k)}{(k!)^4\,396^{4k}}$$

L'une des nombreuses formules produites par Ramanujan pour approximer les décimales de π. Chaque nouveau terme de la somme ajoute environ huit décimales exactes.

Impossible de mentionner tous les résultats ni même tous les domaines dans lesquels les formules de Ramanujan ont apporté des avancées. Parmi les travaux qui ont eu la plus grande influence, il y a sans doute celui sur les formes modulaires. Il s'agit de fonctions définies sur l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive, et ayant des symétries remarquables qui auraient pu faire douter de l'existence de tels objets s'ils n'avaient pas été découverts au XIXe siècle. Elles s'écrivent à l'aide de coefficients qui sont, par essence, des fonctions arithmétiques, c'est-à-dire des fonctions exprimant des propriétés arithmétiques des entiers.

Dans un article fondateur paru en 1916, Ramanujan a conjecturé certaines de ces propriétés sur les coefficients $\tau(n)$ qui apparaissent dans ces formes modulaires. Notamment il a conjecturé que $|\tau(p)| \leq 2\, p^{11/2}$, pour tout nombre premier p. Cette conjecture est devenue un théorème lorsque le Belge Pierre Deligne a démontré les conjectures de Weil dans un travail récompensé par la médaille Fields en 1978. D'autres observations de Ramanujan sur ces coefficients ont eu des prolongements au début des années 1970, lorsque Jean-Pierre Serre et Peter Swinnerton-Dyer les ont interprétées en termes de représentations galoisiennes associées à des formes modulaires. Leurs travaux ont jeté les bases de la preuve célèbre du théorème de Fermat par le Britannique Andrew Wiles dans les années 1990. « *À travers ces exemples, il est frappant de constater la justesse des intuitions mathématiques de Ramanujan, qui l'ont amené à étudier et à mettre en avant des questions fondamentales au cœur du développement des formes modulaires et de la géométrie arithmétique du XXe siècle. Ses formules continuent à nourrir la recherche actuelle dans ces domaines* », estime Cécile Armana, spécialiste de théorie des nombres à l'université de Franche-Comté.

CHEMINEMENT MYSTÉRIEUX

Comment est-il parvenu à tous ces résultats ? Après la disparition de Ramanujan, Hardy regrette à plusieurs reprises ne pas avoir davantage tenté de comprendre les raisonnements de son jeune collègue. De son côté, Ramanujan évoque comment la déesse familiale lui apporte en songe les solutions qu'il découvre à son réveil, renforçant ainsi cet aspect mystique. Réalité ou métaphore ? Bernard Randé penche pour cette dernière solution : « *Cela arrive à tous les mathématiciens de réfléchir à un problème pendant une semaine, de passer une nuit dessus et, le lendemain, après une nuit de sommeil, d'avoir la solution. Ce travail inconscient, c'est 95 % du travail du mathématicien. Mais comme je suis un mathématicien occidental, avec tout l'apprentissage que j'ai eu, je sais verbaliser les pistes de recherches et les voies que j'ai empruntées. Le mystère qui reste dans le cas de Ramanujan, c'est qu'en raison de sa culture très différente et du fait qu'il n'utilise pas la langue commune, on ne comprend pas son cheminement. À l'inverse, il serait étonnant que l'on comprenne comment il en est arrivé là !* » conclut Bernard Randé. ■

(1) Bernard Randé, *Les Carnets indiens de Srinivasa Ramanujan*, Cassini, 2002.

Pour en savoir plus

■ Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity*, Washington Square Press, 1992 : la biographie de Ramanujan dont est tiré le film de Matt Brown.

■ **tinyurl.com/cijm-org-Ramanujan** « Les mystérieux carnets de Ramanujan », conférence d'Édouard Thomas, du magazine *Tangente*, 2016.